

ДВУМЕРНОЕ БЫСТРОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ХАРТЛИ В ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКЕ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Злобин С.Л., Стальной А.Я.

ОАО НПО «Алмаз» им. акад. А.Расплетина

При цифровой обработке изображений и в цифровом телевидении, в частности, одной из важнейших задач является задача сокращения скорости передачи двоичных данных и, следовательно, требуемой ширины полосы частот канала связи. Эта задача решается путём уменьшения избыточности информации, передаваемой в телевизионном сигнале или запоминаемой и обрабатываемой в цифровом процессоре при обработке изображений. Уменьшение объёма информации достигается за счёт её сжатия. Различные алгоритмы сжатия уменьшают объём информации, что приводит к значительному сокращению скорости передачи двоичных данных, и, следовательно, к уменьшению ширины спектра видеосигнала. Сжатие позволяет уменьшить скорость передачи изображения без существенных искажений.

В ряде международных стандартов сжатия изображений: JPEG, MPEG-1, MPEG-2 и др. используется дискретное косинусное преобразование (ДКП) [1], имеющее вещественные частотные коэффициенты (спектральные отсчёты). Двумерное ДКП (ДКП-2) обладает свойством разделимости, то есть двумерное ДКП блока размерностью $N \times N$ можно вычислить через одномерные ДКП по строкам и столбцам этого блока. Разделение двумерного ДКП на одномерные сокращает количество арифметических операций: при вычислении двумерного ДКП блока $N \times N$ необходимое количество операций сложения A_1 и умножения M_1 составляет:

$$A_1 = 2 \cdot N^2 \cdot (N - 1); \quad M_1 = 2 \cdot N^3. \quad (1)$$

Существуют также быстрые алгоритмы вычисления ДКП.

Основным недостатком дискретного косинусного преобразования (ДКП) является невозможность получения с его помощью спектра Фурье, т.е. отсчётов ДПФ. Это верно как для одномерного, так и для двумерного случая. Частотные коэффициенты ДКП $X(k)$ совпадают со спектром Фурье только тогда, когда исходный временной сигнал $x(n)$ является чётной функцией. Невозможность вычисления из спектра ДКП истинного частотного спектра (спектра Фурье) изображения не позволяет выполнить двумерную цифровую фильтрацию в частотной области с помощью различных фильтров — ФНЧ, ФВЧ и т.д. Таким образом, преобразование ДКП при цифровой обработке изображений играет *вспомогательную роль*, оно используется только для сжатия видеоинформации; сам спектр ДКП не имеет самостоятельного значения.

Цифровую обработку изображений желательно выполнять с помощью вещественного преобразования, формирующего действительные коэффициенты, но вместе с тем однозначно связанного со спектром Фурье, т.е. позволяющего получить отсчёты ДПФ и спектральной плотности Фурье (СПМ Фурье).

Дискретное преобразование Хартли (ДПХ), как и ДПФ, применяется в задачах спектрального анализа и цифровой фильтрации [2,3]. В ДПХ данные обрабатываются только в области вещественных чисел. Прямое и обратное преобразования Хартли не имеют различий, они взаимно симметричны. ДПХ является модификацией ДПФ в плоскости вещественной переменной [2,3], преобразования связаны взаимно однозначными соотношениями. СПМ Фурье и фаза преобразования Фурье могут быть непосредственно получены из ДПХ [2]. Целесообразно применение ДПХ для обработки изображений, так как это двумерные массивы действительных чисел. Весьма эффективно использование ДПХ при цифровой фильтрации на основе свёртки [2]; вычисления проводятся только в спектральной области Хартли.

В [2,3] сформулировано ДПХ для двумерного случая и описано вычисление двумерного ДПФ с помощью двумерного ДПХ. Двумерное прямое и обратное дискретное преобразование Хартли (ДПХ-2) массива (изображения) размера $N \times N$ определяются соотношениями:

$$H(u, v) = \frac{1}{N^2} \cdot \sum_{\tau_1=0}^{N-1} \sum_{\tau_2=0}^{N-1} f(\tau_1, \tau_2) \cdot \text{cas} \left[\frac{(2\pi u \tau_1 + 2\pi v \tau_2)}{N} \right]; \quad \tau_1, \tau_2 = 0, \dots, N-1; \quad (2)$$

$$f(\tau_1, \tau_2) = \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1} H(u, v) \cdot \text{cas} \left[\frac{(2\pi u \tau_1 + 2\pi v \tau_2)}{N} \right]; \quad u, v = 0, \dots, N-1, \quad (3)$$

где $\text{cas } \theta = \cos \theta + \sin \theta$ — ядро преобразования, $f(\tau_1, \tau_2)$ — изображение размера $N \times N$.

Двумерное дискретное преобразование Фурье (ДПФ-2) записывается в виде:

$$F(u, v) = R(u, v) + i \cdot I(u, v); \quad i = \sqrt{-1}. \quad (4)$$

Двумерное ДПХ связано с ДПФ-2 соотношениями [2]: $H(u, v) = R(u, v) - I(u, v)$;

$$R(u, v) = [H(u, v) + H(N-u, N-v)]/2; \quad I(u, v) = -[H(u, v) - H(N-u, N-v)]/2.$$

(5)

Двумерная СПМ Фурье вычисляется с помощью зеркального изображения $H(N-u, N-v)$:

$$Z^2(u, v) = [H^2(u, v) + H^2(N-u, N-v)]/2. \quad (6)$$

Ядро ДПХ-2 не расщепляется, его нельзя представить через одномерные ДПХ по строкам и столбцам. В [3] было предложено двумерное Q – преобразование с расщепляющимся ядром:

$$Q(u, v) = \frac{1}{N^2} \cdot \sum_{\tau_1=0}^{N-1} \sum_{\tau_2=0}^{N-1} f(\tau_1, \tau_2) \cdot \text{cas}\left(\frac{2\pi u \tau_1}{N}\right) \cdot \text{cas}\left(\frac{2\pi v \tau_2}{N}\right). \quad (7)$$

Прямое и обратное Q – преобразования идентичны. Преобразование $Q(u, v)$ вычисляется через ДПХ по строкам и столбцам изображения $f(\tau_1, \tau_2)$ и просто связано с двумерным ДПХ [3]:

$$H(u, v) = [Q(u, v) + Q(N-u, v) - Q(N-u, N-v) + Q(u, N-v)]/2. \quad (8)$$

Двумерное ДПФ $F(u, v)$ также можно непосредственно получить из Q – преобразования:

$$R(u, v) = [Q(u, N-v) + Q(N-u, v)]/2; \quad I(u, v) = -[Q(u, v) - Q(N-u, N-v)]/2. \quad (9)$$

Таким образом, двумерная фильтрация, основанная на алгоритме двумерной свёртки, может выполняться не только на основе двумерного ДПХ (минуя спектр Фурье) согласно теореме о двумерной свёртке [2], но и лишь с помощью преобразования $Q(u, v)$, поскольку обе функции — ДПФ $F(u, v)$ и ДПХ $H(u, v)$ выражаются через Q – преобразование (8,9).

Для выполнения преобразования $Q(u, v)$ может быть применён матричный рекуррентный алгоритм БПХ по основанию 2 [5,6] или аналогичные матричные алгоритмы БПХ по произвольным основаниям $b = 3, 4, 5, 7$, а также по смешанному основанию. При использовании алгоритма БПХ по основанию 2 [6] для обработки изображения $N \times N$ (где $N = 2^s$) необходимое количество операций сложения A_2 и умножения M_2 будет составлять:

$$A_2 = 2 \cdot N \cdot [1,5 \cdot N \cdot (\log_2 N - 2) + 2 \cdot N]; \quad M_2 = 2 \cdot N^2 \cdot (\log_2 N - 2). \quad (10)$$

В качестве альтернативного быстрого алгоритма вычисления двумерного ДПХ (ДПХ–2) [4] и с целью ускорения и упрощения организации вычислительного процесса авторами разработан новый двумерный матричный рекуррентный алгоритм БПХ по основанию 2×2 , для массивов произвольной размерности $N \times N$, где $N = 2^s$. Алгоритм записан в виде трёхмерных матриц, его графическая интерпретация также пространственная — матричные диаграммы алгоритма (рис.1) [6] представлены в виде трёхмерных матриц. Матричные формулы двумерного алгоритма БПХ имеют вид:

$$\begin{aligned} {}_{n_2} \mathbf{F}_p^t &= {}_{n_2} \mathbf{A}_p^t + {}_{n_2} \mathbf{B}_p^t * \mathbf{CL}_{n_2+n_2}^{(h)} * \mathbf{B}_p^t * \mathbf{SL}_{n_2+n_2}^{(h)} * \mathbf{D}_p^t * \mathbf{CJ}_{p+n_2}^{(v)} * \mathbf{D}_p^t * \mathbf{SJ}_{p+n_2}^{(v)} * \mathbf{E}_p^t * \mathbf{CS}_{n_2+n_2}^{(h)} * \mathbf{E}_p^t * \mathbf{SN}_{n_2}^{(h)}; \\ {}_{n_2} \mathbf{G}_p^t &= {}_{n_2} \mathbf{A}_p^t + {}_{n_2} \mathbf{B}_p^t * \mathbf{CL}_{n_2+n_2}^{(h)} * \mathbf{B}_p^t * \mathbf{SL}_{n_2-n_2}^{(h)} * \mathbf{D}_p^t * \mathbf{CJ}_{p-n_2}^{(v)} * \mathbf{D}_p^t * \mathbf{SJ}_{p-n_2}^{(v)} * \mathbf{E}_p^t * \mathbf{CS}_{n_2-n_2}^{(h)} * \mathbf{E}_p^t * \mathbf{SN}_{n_2}^{(h)}; \\ {}_{n_2} \mathbf{H}_p^t &= {}_{n_2} \mathbf{A}_p^t - {}_{n_2} \mathbf{B}_p^t * \mathbf{CL}_{n_2-n_2}^{(h)} * \mathbf{B}_p^t * \mathbf{SL}_{n_2+n_2}^{(h)} * \mathbf{D}_p^t * \mathbf{CJ}_{p+n_2}^{(v)} * \mathbf{D}_p^t * \mathbf{SJ}_{p-n_2}^{(v)} * \mathbf{E}_p^t * \mathbf{CS}_{n_2-n_2}^{(h)} * \mathbf{E}_p^t * \mathbf{SN}_{n_2}^{(h)}; \\ {}_{n_2} \mathbf{X}_p^t &= {}_{n_2} \mathbf{A}_p^t - {}_{n_2} \mathbf{B}_p^t * \mathbf{CL}_{n_2-n_2}^{(h)} * \mathbf{B}_p^t * \mathbf{SL}_{n_2-n_2}^{(h)} * \mathbf{D}_p^t * \mathbf{CJ}_{p-n_2}^{(v)} * \mathbf{D}_p^t * \mathbf{SJ}_{p+n_2}^{(v)} * \mathbf{E}_p^t * \mathbf{CS}_{n_2+n_2}^{(h)} * \mathbf{E}_p^t * \mathbf{SN}_{n_2}^{(h)}, \end{aligned} \quad (11)$$

где $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{B}, \mathbf{D}, \mathbf{D}, \mathbf{E}, \mathbf{E}$ — семь входных трёхмерных матриц;

$\mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{H}, \mathbf{X}$ — четыре выходных трёхмерные матрицы;

$\mathbf{CL}_{n_2}^1, \mathbf{SL}_{n_2}^1, \mathbf{CJ}_p^1, \mathbf{SJ}_p^1, \mathbf{CS}_{n_2}^1, \mathbf{SN}_{n_2}^1$ — вектор–столбцы весовых коэффициентов;

$p = 2^{m-1}, t = 2^{s-m}, m = 1, 2, 3, \dots, s, m$ — номер итерации, $s = \log_2 N, n_2 = N/2$;

${}_{n_2} \mathbf{A}_p^t$ — матрица \mathbf{A} , имеющая $n_2 = N/2$ вертикальных слоёв, каждый из которых является матрицей размером $p \times t$ (p и t — число строк и столбцов), остальные матрицы аналогичны;

${}_{n_2} \mathbf{B}_p^t$ — зеркальная (инверсная) трёхмерная матрица, причём в двумерном случае имеет место инверсия и горизонтальных и вертикальных слоёв; матрицы \mathbf{D} и \mathbf{E} аналогичны;

${}_{n_2} \mathbf{B}_p^t * \mathbf{CL}_{n_2}^1$ и ${}_{n_2} \mathbf{D}_p^t * \mathbf{CJ}_p^1$ — поэлементное (статическое) умножение столбцов горизонтальных или вертикальных слоёв матриц \mathbf{B} и \mathbf{D} на вектор–столбцы \mathbf{CL} и \mathbf{CJ} .

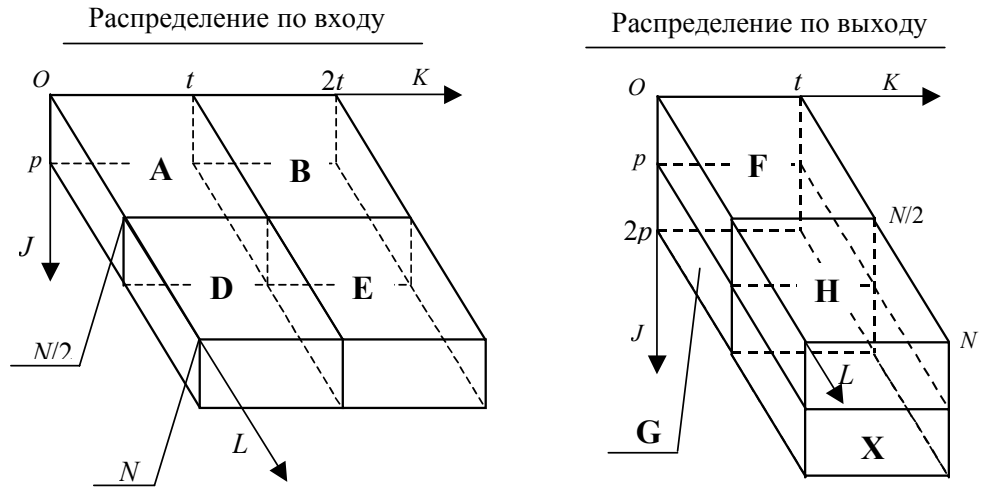


Рис.1. Матричные диаграммы двумерного алгоритма БПХ по основанию 2×2 .

Преобразование осуществляется за $s = \log_2 N$ итераций. На каждой итерации выполняется $N^2/4$ базовых операций — двумерных «бабочек». Изображение $f(\tau_1, \tau_2)$ представляется в виде матрицы размером $N \times N$, состоящей из блочных матриц **A, B, D** и **E**. Это горизонтальная плоскость KOL (рис.1). На каждой итерации формируются «частичные» двумерные спектры, являющиеся вертикальными слоями в трёхмерных матрицах — аналогичное явление описано для одномерного матричного алгоритма БПХ [6]. В результате последней итерации спектр Хартли представляется в виде матрицы $N \times N$, которая лежит в вертикальной плоскости JOL . Это наглядно иллюстрирует ортогональность исходного изображения и соответствующей ему плоскости спектра Хартли. Полное количество операций сложения A_3 и умножения M_3 нового двумерного матричного алгоритма БПХ (11) можно найти по формулам:

$$A_3 = (11/4) \cdot N^2 \cdot (\log_2 N - 2) + 4 \cdot N^2; \quad M_3 = (3/2) \cdot N^2 \cdot (\log_2 N - 2). \quad (12)$$

Двумерный алгоритм БПХ (11) требует выполнения приблизительно на 25% меньше операций умножения, чем это необходимо при вычислении Q – преобразования (10).

ЛИТЕРАТУРА

1. А.В.Смирнов, «Основы цифрового телевидения». Москва, «Горячая линия–Телеком», 2001.
2. Р.Н.Брейсуэлл, «Преобразование Хартли». Москва, «Мир», 1990.
3. Р.Н.Брейсуэлл, О.Бьюнеман и др., «Быстрое двумерное преобразование Хартли». ТИИЭР, том 74, № 9, 1986.
4. «Быстрые алгоритмы в цифровой обработке изображений», под ред. Т.С.Хуанга. Москва, «Радио и связь», 1984.
5. А.Я.Стальной, С.Л.Злобин, А.В.Анищенко. Патент РФ на изобретение: «Процессор для быстрого преобразования Хартли», № 2071221, 6 G 06 F 17/14, 29.06.94 г.
6. С.Л.Злобин, А.Я.Стальной, «Матричный рекуррентный алгоритм быстрого преобразования Хартли с естественным порядком адресации входной и выходной информации». Радиотехника, № 4, апрель 2000 г.