

ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ И ОСОБЕННОСТИ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ВЕЙВЛЕТ-ФИЛЬТРОВ НА Z-ПЛОСКОСТИ*

Кобелев В.Ю., Корепанов И.В., Буралков Д.В.

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова
150000, Россия, Ярославль, ул. Советская, 14. Тел. (0852) 79-77-75, E-mail: dcslab@uniyar.ac.ru

Реферат. Выполнено теоретическое исследование возможности параметризации ортогональных вейвлет-функции. Представлено практическое применение разработанной методики для анализа представления вейвлет фильтров на Z-плоскости. Получены закономерности движения нулей на Z-плоскости.

Возможность параметризации вейвлет-функций вытекает из некоторого произвола в определении вейвлета. Параметризация вейвлет-функций подчиняется следующей закономерности:

Число степеней свободы при определении вейвлета равно половине порядка вейвлета минус 1. Т.е., если порядок вейвлета есть δ , то он определяется тремя степенями свободы.

Варьируя параметрами параметризации, появляется возможность синтеза семейства вейвлетов, позволяющих оптимально решать поставленные задачи по сжатию и фильтрации информации. Вопросы параметризации вейвлет-функций уже неоднократно отражались в публикациях [1,2], в настоящей работе представлен несколько иной взгляд по этому вопросу.

Рассмотрим свойство ортогональности масштабирующей функции $\varphi(t)$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\varphi(t-k)dt = \delta_k^0, \quad \sum_{i=0}^{M-1} C_{2k+1}C_i = 2\delta_k^0. \quad (1)$$

где $C_0 \dots C_{M-1}$ - есть коэффициенты масштабирующего уравнения на функцию $\varphi(t)$.

Пусть $H(j\omega)$ - Фурье-спектр коэффициентов $C_0 \dots C_{M-1}$, тогда формулы (1) однозначно соответствуют нижеследующему выражению:

$$|H(j\omega)|^2 + |H(j(\pi - \omega))|^2 = 2. \quad (2)$$

Представим $|H(j\omega)|^2$ косинусным рядом:

$$|H(j\omega)|^2 = \sum_{k=0}^{M-1} b_k \cos(k\omega). \quad (3)$$

После подстановки выражения (3) в (2) получим ряд соотношений:

- $b_k = 0$, при $k = 2, 4, \dots, M$
- $b_0 = 1$.
- $\sum_{k=0}^{M-1} b_k = 2$

Т.к. модуль $|H(j\omega)|$ есть всегда неотрицательная функция, следует ограничительное неравенство на коэффициенты в разложении (3).

Предложенный выше набор правил позволяет синтезировать функцию $|H(j\omega)|$, соответствующую вейвлет-функции желаемого порядка и обладающую желаемыми частотными свойствами.

Предложенная методика параметризации вейвлет-функций была использована для анализа состояний вейвлет-фильтров произвольных порядков на Z-плоскости. Задача синтеза вейвлет-функции с заданными параметрами была сопоставлена задаче синтеза минимально-фазового фильтра с известной амплитудной-частотной характеристикой и для решения использовался метод, описанный в работе Добеши [1].

В данной работе под вейвлет-фильтром понимается фильтр, чья импульсная характеристика образуется коэффициентами $C_0 \dots C_{M-1}$ масштабирующего уравнения на масштабирующую функцию $\varphi(t)$.

Для анализа использовались семейства ортогональных вейвлетов различных порядков – 4,6,8,10 – 20. Разработана программа для расчета. Основная схема вычисления нулей состоит в следующем:

- выбираем порядок вейвлета (например семейство вейвлетов 10 порядка);
- вариацией параметров получаем различные вейвлет-функции;

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 02-02-17500)

- вычисляем нули вейвлет-фильтров и отображаем их на Z-плоскости;
На рисунках 1-4 представлено возможное размещение нулей вейвлет-фильтров.

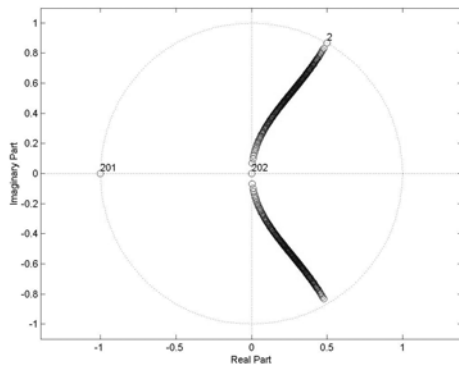


Рис. 1 Пространство нулей семейства вейвлетов 4-го порядка

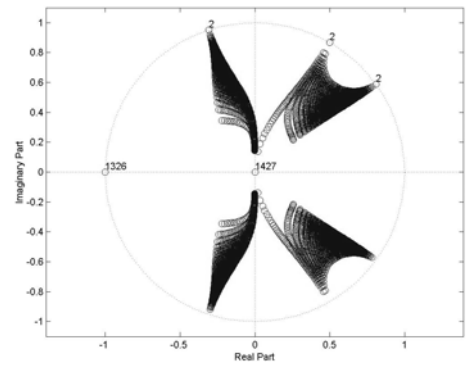


Рис. 2 Пространство нулей семейства вейвлетов 6-го порядка

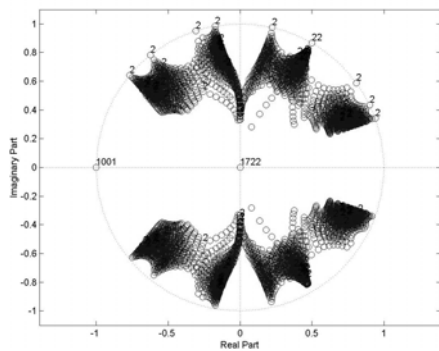


Рис. 3 Пространство нулей семейства вейвлетов 10-го порядка

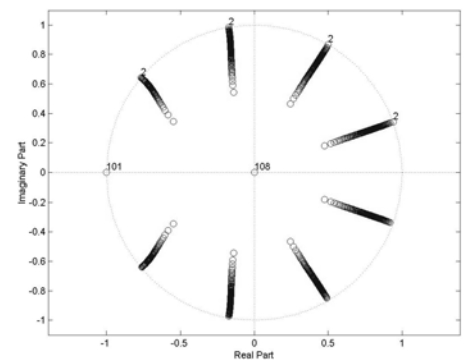


Рис. 4 Пространство нулей семейства вейвлетов 10-го порядка в частном случае при равенстве трех из четырех параметров нулю

Теоретически было получено уравнение кривой на рис.1 (уравнение 4). Анализ остальных кривых был выполнен эмпирически.

$$a_2^2 = \frac{a_1 + a_1^3 - a_1^2}{1 - a_1} \quad (4)$$

где $p = a_1 + ia_2$ – искомый нуль (точка кривой).

Из анализа полученных областей сделан ряд выводов:

1. Пространство нулей семейств вейвлет-фильтров на Z-плоскости разделено на сектора. Выделенные сектора можно условно разделить на основные и дополняющие. Под дополняющий набором секторов понимается набор нулей, дополняющий пространство распределения нулей семейства порядка N-1 до семейства порядка N.
2. Общая картина распределения секторов представляется интерполяцией дополняющих секторов различных порядков.
3. Количество дополняющих секторов N равно порядку вейвлет-фильтра M минус 1.
4. Дополняющие сектора размещены равномерно, за начало отсчета выбрано направление $\varphi = \pi$.
5. Получены асимптоты, ограничивающие сектора.
6. Получена оценка расширения пространства нулей при увеличении порядка семейства вейвлет-функции.

Полученные результаты могут быть использованы при решении ряда задач по синтезу вейвлет-фильтров:

- синтез вейвлет-фильтров с нужной амплитудно-частотной характеристикой;
- синтез вейвлет-фильтров с нужным распределением нулей.

Литература

1. Добеши И. Десять лекций по вейвлетам: Пер. с англ. – Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотичная динамика”, 2001, 464 стр.
2. Kumar M. Mandal. Wavelet for image compression. University of Ottawa, 1995, p.180

