МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ЦИФРОВЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Трубин И.С., Буторин Е.Л.

Вятский государственный университет,
кафедра радиоэлектронных средств
610000, г. Киров, ул. Московская д.36, тел. (8332)69-32-95, факс. (8332)62-65-78, e-mail: res@riac.ru

Для создания и исследования алгоритмов обработки изображений необходимо располагать математической моделью изображения. К моделям предъявляются два основных требования – адекватность реальным изображениям и достаточно простое математическое описание. Эти требования являются противоречивыми. Стремление точно описать реальное изображение приводит к усложнению математической модели. Учитывая, что полутоновые изображения часто имеют экспоненциальные корреляционные функции в пространстве и во времени, компромиссным решением является использование марковских процессов с дискретными аргументами в качестве математической модели изображений [1, 2].

Целью данной работы является построить математическую модель, адекватную последовательности полутоновых изображений, представленных в цифровом виде.

При цифровом представлении изображений m-разрядными двоичными числами полутоновое изображение может рассматривать как сумму двоичных изображений (сечений). Представление цифрового полутонового изображения набором двоичных сечений сводит задачу построения пространственно-временной модели (ПВММ) полутоновых изображений к построению ПВММ для двоичных сечений.

Представим последовательность кадров бинарных изображений трехмерным марковским случайным процессом (полем) с двумя пространственными координатами, определяющими положение элемента изображения в кадре, и третьей – временной, связанной с номера кадра или дискретным временем его формирования.

Если обработка элемента изображения фильтрующим устройством осуществляется сразу после его получения из канала связи, то в апертуру фильтра могут входить только элементы, полученные ранее, т.е. элементы, принадлежащие каузально расположенному множеству элементов изображения. Поэтому пространственная часть ПВММ последовательности изображений может быть только случайным каузальным полем, то есть в качестве пространственной части ПВММ можно выбрать одностороннее марковское случайное поле (ОМСП), которое называется также двумерной марковской цепью на несимметричной полуплоскости (НСПП) [1] (рис. 1).

На рис. 2 представлен фрагмент ПВММ, состоящий из двух пространственных фрагментов в области F_4, принадлежащих соседним кадрам, где

$$\nu_1 = \mu(i, j-1, t), \nu_2 = \mu(i-1, j, t), \nu_3 = \mu(i-1, j-1, t), \nu_4 = \mu(i, j, t),$$
$$\nu_1' = \mu(i, j-1, t-1), \nu_2' = \mu(i-1, j, t-1), \nu_3' = \mu(i-1, j-1, t-1), \nu_4' = \mu(i, j, t-1).$$

Будем считать, что генерации подлежит случайный двоичный элемент изображения ν_4 в k-м кадре принадлежащий области F_4 (рис.1).

Полагая, что корреляционная функция последовательности кадров изображений разделима

$$r_ц(l, q, s) = \mathrm{E}[\mu(i, j, t)\mu(i+l, j+q, t+s)] = \sigma_\mu^2 \exp\{-\alpha_1|l| - \alpha_2|q| - \alpha_3|s|\},$$

где $\mathrm{E}[\cdot]$ имеет смысл математического ожидания; σ_μ^2 - дисперсия сигнала изображения; $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ - масштабные множители, представим процесс формирования элементов в последовательности кадров как комбинацию трех двумерных дискретных марковских процессов с равновероятными состояниями M_1 и M_2 и матрицами вероятностей переходов:

$\Pi_1' = \|\pi_{ij}'\|_{2\times2}$ - матрица вероятностей переходов состояний элементов бинарных изображений по горизонтали (строке) в k-м кадре;

$\Pi_2'' = \|\pi_{ij}''\|_{2\times2}$ - матрица вероятностей переходов состояний элементов бинарных изображений по вертикали (столбцу) в k-м кадре;

$\Pi_3''' = \|\pi_{ij}'''\|_{2\times2}$ - матрица вероятностей переходов состояний элементов изображений с одинаковыми пространственными координатами из (k-1)-го кадра в k-ый.

Тогда для генерации элемента ν_4 (рис. 2) необходимо сформировать независимо три множества элементов $\{\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4\}$, $\{\nu_2, \nu_2', \nu_4, \nu_4'\}$, $\{\nu_1, \nu_1', \nu_4, \nu_4'\}$ и вычислить вероятность состояния элемента ν_4 по каждому множеству, последовательность которых с вероятностью $p_i\left(i=\overline{1,3}\right)$ определяет состояние процесса $\mu(i,j,k)$.

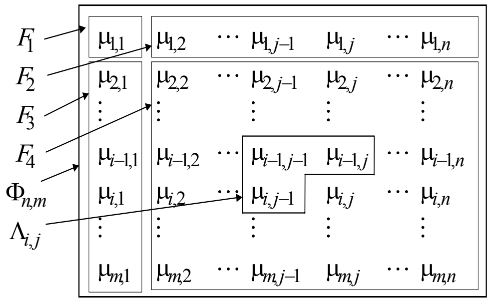


Рис. 1 (Fig. 1)

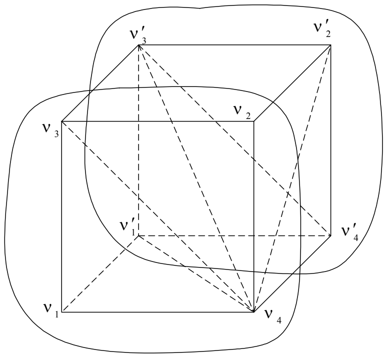


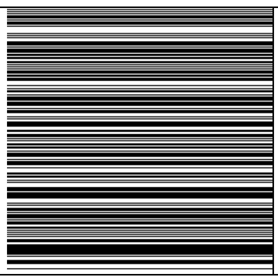
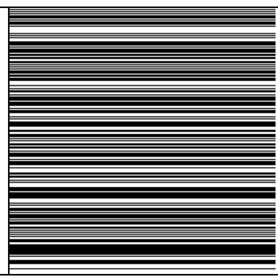
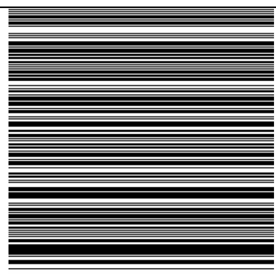
Рис. 2 (Fig. 2)

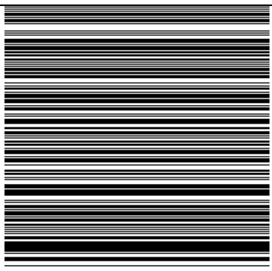
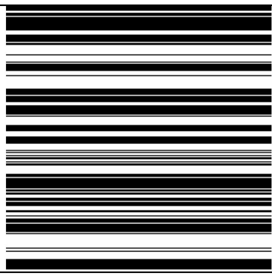
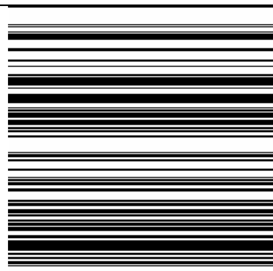
Алгоритм генерации состояний элементов изображения в области F_4 состоит в следующем:

1. Задаются или вычисляются матрицы $\Pi_i\left(i=\overline{1,3}\right)$.
2. Генерируются независимые случайные числа $\xi_l\left(l=\overline{1,3}\right)$, равномерно распределенные на интервале [0,1].
3. Формируются три множества, включающие элементы изображений $\{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4\}$, $\{\nu_2,\nu_2',\nu_4,\nu_4'\}$ и $\{\nu_1,\nu_1',\nu_4,\nu_4'\}$(рис. 1).
4. Для каждого множества в соответствие с алгоритмом генерации двумерного марковского поля [2] определяется состояние элемента ν_4.
5. По результатам, полученным в п. 3-4, подсчитывается число состояний M_1 и M_2 для элемента ν_4.
6. Если сумма состояний M_1, больше, чем сумма состояний M_2, то ν_4 принимает состояние M_1, в противном случае M_2.

Задав количество двоичных разрядов, представляющих элементы изображения, и значения элементов матриц вероятностей перехода $\Pi_i\left(i=\overline{1,3}\right)$ в каждом бинарном сечении можно построить цифровую ПВММ полутонового изображения адекватного реальному изображению марковского типа, представленному в цифровом виде.

На рис. 3 представлены последовательности изображений, полученных на основе двоичной ПВММ для коэффициентов корреляций по горизонтали и времени $r_г=r_t=1$ и вертикали $r_в=0$(рис. 3 а) и $r_г=1,\ r_в=0,\ r_t=0$ (рис. 3 б). Из анализа полученных изображений следует, что структура изображения остается постоянной от кадра к кадру. При равенстве коэффициента корреляции по времени 1 исходный кадр повторяется (рис. 3 а).

		
Кадр 1 (Frame 1)	Кадр 5 (Frame 5)	Кадр 10 (Frame 10)
Рис. 3 а (Fig. 3 a)		

		
Кадр 1 (Frame 1)	Кадр 5(Frame 5)	Кадр 10 (Frame 10)
Рис.3 б (Fig. 3 b)		

На рис. 4 показан кадр из последовательности полутоновых изображений, синтезированных по ПВММ. На рис. 5 представлена центральная часть его пространственной автокорреляционной функции (АКФ). Из рисунка видно, что имеет экспоненциальный характер, близкий к АКФ обобщенного полутонового изображения марковского типа.

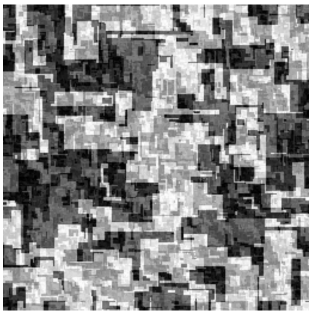


Рис. 4 (Fig. 4)

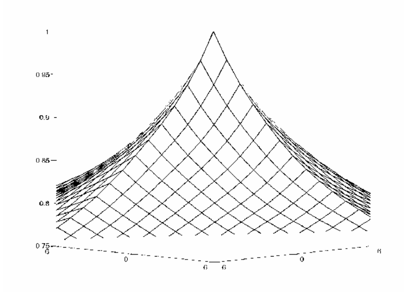


Рис.5 (Fig. 5)

Литература

1. Дерин Х. Случайные процессы марковского типа с дискретными аргументами / Х. Дерин, П. Келли // ТИИЭР. - 1989. - Т. 77. - № 10. - С. 42 - 71.
2. Трубин И.С. Цифровая модель многоуровневых текстурных изображений // Радиолокация, навигация, связь: Сборник трудов VIII международной научно-технической конференции. - Т. 1.- Воронеж, 2002. - С. 322-330.