НОВЫЕ ИДЕАЛЬНЫЕ 4-ФАЗНЫЕ И 8-ФАЗНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ С НУЛЯМИ

Кренгель Е.И.
ООО «Кедах Электроникс Инжиниринг», Россия, Москва
Тел. (095) 530-01-02, E-mail: evgeniy.krengel@kedah.ru

1. Введение

В настоящее время q-фазные последовательности с идеальной, почти идеальной и нечетно-идеальной периодической автокорреляционной функцией широко используются для синхронизации и оценки параметров каналов в системах мобильной связи, а также для определения дальности в радиолокации и гидролокации [1-5]. Последовательность $x=\{x_i\}$ длины N называется идеальной, если ее периодическая автокорреляционная функция $\theta_{x,x}(l)=\sum_{i=0}^{N-1} x_i x_{i+l}^*$ при всех ненулевых сдвигах равна нулю, и почти идеальной, если $\theta_{x,x}(l)$ равна нулю при всех ненулевых сдвигах, кроме одного [1-3]. Соответственно последовательность x называется нечетно-идеальной, если ее нечетная периодическая автокорреляционная функция $\hat{\theta}_{x,x}(l)=\sum_{i=0}^{N-l-1} x_i \overline{x}_{i+l}^* + \sum_{i=N-l}^{N-1} x_i \overline{x}_{i+l-N}^*$ при всех ненулевых сдвигах l равна нулю [3]. Известные идеальные q-фазные последовательности условно можно разделить на два типа: идеальные q-фазные последовательности без нулей (I-тип) и идеальные q-фазные последовательности с нулями (II-тип). На сегодня известна только одна идеальная двоичная последовательность 1 1 1 –1 (тип I) длины N=4 и весьма вероятно других идеальных двоичных последовательностей длины N>4 в природе не существует [3]. К идеальным недвоичным q-фазным последовательностям типа I относятся последовательности Фрэнка(Frank), Задова-Чу(Zadoff-Chu), Милевского (Milewski), а также комбинированные последовательности Фрэнка-Чу [2]. В [6] было показано, что все эти последовательности являются подмножеством множества GCL последовательностей (generalized chirp like sequences). К сожалению, размер алфавита этих последовательностей непосредственно зависит от их длины. Так, например, 4-фазные и 8-фазные последовательности Чу, Фрэнка и Милевского существуют при длинах 2, 16, 8 и 4, 64, 32 соответственно. В то же время существует бесконечное количество идеальных 4-фазных и 8-фазных последовательностей типа II. К ним относятся 4-фазные последовательности Ли (Lee) [7] длины p^m+1, $p=4t+1$, 8-фазные последовательности Люке (Lüke) длины $(p^n-1)/(p^m-1)=4 \bmod 8$ [8], 8-фазные последовательности Тиркела-Хэлла (Tirkel-Hall) [9] длины $(p^n-1)/(p^m-1)$, p =8t+1 и др.

В настоящей работе на основе троичных последовательностей длины $2(p^n-1)/(p^m-1)$, *где* $p>2$ - простое число, $n=mk$, $m\geq 1$, $k>1$ и p^m-1 кратно 4, с нечетно-идеальной периодической автокорреляционной функцией [10,11] построены новые семейства идеальных 4-фазных и 8-фазных последовательностей типа II такой же длины и пик-фактором, близким к единице.

2. Конструирование идеальных 4-фазных и 8-фазных последовательностей типа II

Новые идеальные 4-фазные и 8-фазные последовательности типа II образуются в результате применения четно-нечетного преобразования (EOT) Моу [12] к нечетно-идеальным троичным (OPT) последовательностям длины $2(p^n-1)/(p^m-1)$, теория которых дана в [10,11]. Напомним кратко основные ее положения.

Теорема 1 [11]. Пусть $p>2$ есть простое и a есть примитивный элемент поля $GF(p^n)$, где $n=mk$, $m\geq 1$, $k>1$ и p^m-1 кратно 4. Пусть β - примитивный элемент $GF(p^m)$ и $T=(p^n-1)/(p^m-1)$. Тогда последовательность $\hat{w}$, задаваемая правилом

$$\hat{w}_i=\psi(tr_m^n(a^i)),\quad i=0,1\ldots,2T-1 \qquad (1),$$

где

$$\psi(x)=\begin{cases} (-1)^{\lfloor((ind_\beta x) \bmod 4)/2\rfloor}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases},\quad x\in GF(p^m) \quad (2),$$

$ind_\beta x$ – индекс (логарифм) x по основанию β, а $\lfloor u \rfloor$ – $\max\{n \mid n\leq u,\ n$ – целое$\}$,

есть OPT последовательность длины $2(p^n-1)/(p^m-1)$ с $Z=2(p^{n-m}-1)/(p^m-1)$ нулями.

Следствие 1 [11]. При $n=2m$ последовательность (1) есть OPT последовательность длины $N=2(p^m+1)$ с двумя нулевыми элементами.

Согласно [12] четно-нечетное преобразование (EOT) с целым параметром t последовательности $s=\{s_j\}$ длины N есть линейное преобразование вида

$s_j\langle t\rangle = s_j\exp(i\pi j(2t+1)/N)$ всех $j=0,1,2\ldots N-1$, $i=\sqrt{-1}$ (3)

Пусть $\theta_{rs}(\tau)$ и $\tilde{\theta}_{rs}(\tau)$ есть соответственно четная (периодическая) и нечетная корреляционные функции последовательностей **r** и **s** длины *N*, а $\theta_{r\langle t\rangle s\langle t\rangle}(\tau)$ и $\tilde{\theta}_{r\langle t\rangle s\langle t\rangle}(\tau)$ соответственно четная и нечетная корреляционные функции последовательностей $\mathbf{r}\langle t\rangle$ и $\mathbf{s}\langle t\rangle$. Тогда [12]

$$\left|\theta_{r\langle t\rangle s\langle t\rangle}(\tau)\right| = \left|\tilde{\theta}_{rs}(\tau)\right| \quad (4)$$

и

$$\left|\tilde{\theta}_{r\langle t\rangle s\langle t\rangle}(\tau)\right| = \left|\theta_{rs}(\tau)\right| \quad (5)$$

для всех $\tau=0,1,\ldots,N-1$.

Заметим, что когда *N* кратно $2t+1$, ЕОТ совпадает с бинарно-фазовым преобразованием (BTP) Люке [8]. Из (4-5) следует, что если **s** есть нечетно-идеальная последовательность, то последовательность $\mathbf{s}\langle t\rangle$ имеет идеальную автокорреляцию, т.е. она идеальна. Объем фазового алфавита такой последовательности равен $P=2N/\gcd(2t+1,\ N)$. Поэтому для его минимизации следует максимизировать значение $\gcd(2t+1,N)$. В [12] показано, что в этом случае $\mathbf{s}\langle t\rangle=\{s_j\exp(i\pi j/2^c)\}$, где 2^c есть максимальный степени два делитель N.

Рассмотрим многофазные последовательности $\tilde{\mathbf{w}}\langle t\rangle$, образованные в результате применения ЕОТ преобразования к последовательностям $\tilde{\mathbf{w}}$ (1). Поскольку *N* есть четное число, то *P* всегда кратно 4. При этом, что когда $N/2=(p^n-1)/(p^m-1)$ нечетно, минимальное значение $P_{\min}=4$, а когда нечетно $N/4$, то $P_{\min}=8$. Очевидно, $N/2$ будет нечетно только в случае нечетных значений $k=n/m$. Соответственно $N/4$ будет нечетно в случае нечетных значений $k/2$. Действительно, в силу $p=4u+1$ имеем $N/2=k \bmod 4$. Следовательно, $N/2=4h+k$, где *h* – некоторое целое число. Отсюда получаем $N/4=2h+k/2$. Таким образом, мы доказали следующую теорему.

Теорема 2. Пусть $\tilde{\mathbf{w}}=\{\tilde{w}_j\}$, $j=0,1,\ldots N-1$ есть нечетно-идеальная троичная последовательность (1) длины $N=2(p^n-1)/(p^m-1)$, $n=mk$, $m\geq1$, $k>1$. Тогда

при нечетных *k* $\{\tilde{w}_j\exp(i2\pi j/4)\}$ есть идеальная 4-фазная последовательность типа II с *Z* нулями.

при нечетных $k/2$ $\{\tilde{w}_j\exp(i2\pi j/8)\}$ есть идеальная 8-фазная последовательность типа II с *Z* нулями.

В качестве иллюстрации рассмотрим нечетно-идеальную троичную последовательность длины 36 с параметрами $p=17$, $m=1$ и $k=2$: -111-1-11-1-1-1011-111111-11-1-11-11-11011-1-11111 [10]. Здесь $k/2=1$ – нечетно и, следовательно, $P_{\min}=8$. Из (3) находим, что $P_{\min}=8$ будет при $t=4$. Результирующую последовательность $\tilde{\mathbf{w}}\langle 4\rangle=\{\tilde{w}_j\exp(i2\pi j/8)\}$, $j=0,1,\ldots,35$, более наглядно можно представить в виде $\tilde{\mathbf{w}}\langle 4\rangle=\{\exp(i2\pi u_j/8)\}$, где $\mathbf{u}=\{u_j\}$=4,1,2,7,0,5,2,3,4,-,2,3,0,5,6,7,0, 1,6,3,0,1,6,3,0,5, 2,-,4,5,2, 3,0, 1,2,3 – целочисленная последовательность по модулю 8 длины 36, а $\tilde{w}_j\langle 4\rangle=0$ для всех u_j=-. Еще один пример. Пусть $p=13$, $n=3$, $m=1$ и $k=3$. Тогда $N=366$, а $T=N/2=183$ нечетно. Тогда по теореме 2 получаем идеальную 4-фазную последовательность длины 366 с $2(T-p^{n-m})=28$ нулями.

3.Уникальность

Анализ длин полученных с помощью Теоремы 2 новых последовательностей и известных 8-фазых последовательностей [7-9] показал, что существуют бесконечные подмножества новых последовательностей, длине которых нет аналогов среди последовательностей [7-9]. Такие новые последовательности были названы "уникальными". В частности, все новые 8-фазные последовательности с параметрами $n=2m=0 \bmod 4$ являются "уникальными" [11]. Очевидно, свойством "уникальности" будут обладать также 8-фазные последовательности длины $2(p+1)$ при всех надлежащих $p=10h+7=1 \bmod 4$. В ходе исследований было установлено, что среди новых 4-фазных последовательностей уникальными являются все последовательности с параметрами $m=1$, $k=3$, $p=10t+1=1 \bmod 4$, где $p<1000$, и $m=1$, $k=3$, $p=10t+3=1 \bmod 1$, где $p<10000$. Можно предположить, что число "уникальных" 4-фазных последовательностей типа II также бесконечно велико.

Ниже в Таблицах 1 и 2 представлены параметры некоторых новых 4-фазных и 8-фазных последовательностей типа II "уникальной" длины.

Таблица 1. Параметры новых идеальных 4-фазных последовательностей типа II

p	*m*	*k*	*N*	*Z*	*p*	*m*	*k*	*N*	*Z*	*p*	*m*	*k*	*N*	*Z*
13	1	3	366	28	61	1	3	7556	124	113	1	3	25766	228
5	1	5	1562	312	73	1	3	10806	148	11	2	3	29526	244
37	1	3	2814	76	81	1	3	13286	164	157	1	3	49614	316

41	1	3	3446	82	3	2	5	14762	1640	13	2	3	57462	340
7	2	3	4902	100	89	1	3	16022	180	173	1	3	60206	348
53	1	3	5726	108	101	1	3	20606	204	13	1	5	61882	4760

Таблица 2. Параметры новых идеальных 8-фазных последовательностей типа II с $n=2m$

p	*m*	*N*	*p*	*m*	*N*	*p*	*M*	*N*	*p*	*m*	*N*	*p*	*m*	*N*
17	1	36	109	1	220	229	1	460	337	1	676	401	1	804
5	2	52	137	1	276	241	1	484	7	3	688	409	1	820
37	1	76	149	1	300	257	1	516	349	1	700	421	1	844
7	2	100	157	1	316	269	1	540	353	1	708	433	1	868
61	1	124	13	2	340	277	1	556	19	2	724	449	1	900
73	1	148	181	1	364	17	2	580	373	1	748	457	1	916
97	1	196	193	1	388	313	1	628	389	1	780	461	1	924
101	1	408	197	1	792	317	1	1272	397	1	1592	23	2	1060

4. Заключение

Полученные идеальные 4-фазные ($N/2$ – нечетно) и 8-фазные ($N/4$ – нечетно) последовательности длины $N=2(p^n-1)/(p^m-1)$ типа II с пик-фактором, близким к единице, могут быть использованы в системах связи, радиолокации и гидролокации. Представляется, что полезными могут быть последовательности как “уникальной” длины, так и новые последовательности, длина которых совпадает с длиной известных последовательностей, поскольку это ведет к увеличению общего числа идеальных последовательностей. При этом остаются открытыми вопросы, касающиеся оценки числа этих последовательностей, а также их практической реализации.

Литература

1. В.И. Ипатов.: “Периодические дискретные сигналы с оптимальными корреляционными свойствами”, М.: Радио и связь, 1992.
2. P.Fan and M. Darnell.:”Sequence Design for Communications Applications”, Research Studies Press Ltd., London, 1996
3. H. D. Lüke, H. D. Schotten and H. Hadinejad-Mahram.: “Binary and quadriphase sequences with optimal autocorrelation properties: survey”, IEEE Transaction on Information Theory, vol. IT-49, No.12, pp. 3271-3282, 2003.
4. H. D. Lüke.: “Binary Alexis sequences with perfect correlation”, – IEEE Transactions on Communications, Vol. 49,No. 6, June, pp.966-968, 2001.
5. G. Krämer.: “Application of Lüke-Schotten codes to Radar”, Proceedings German Radar Symposium GRS 2000, 11-12 October, Berlin, Germany.
6. B.M. Popović.: “Generalized chirp-like polyphase sequences with optimum correlation properties”, IEEE Transaction on Information Theory, vol. IT-38, No. 4, pp. 1406-1409, 1992.
7. C.E.Lee.: “Perfect q-ary sequences from multiplicative characters over GF(p)”, Electronics Letters, 28,9(Ap.,1992), pp.833-835.
8. H. D. Lüke.: “BTP-transform and perfect sequences with small phase alphabet,” IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst., vol. 32, pp. 497–499, Jan.96
9. A.Z.Tirkel, T.E.Hall.: “New quasi-perfect and perfect sequences of roots of unity and zero”, in Preproceedings of “Sequences and Their Applications 2004” (SETA04), October 25-28, 2004.
10. Е.И. Кренгель.: “Троичные последовательности с почти идеальной периодической автокорреляцией”, Сборник докладов 6-й международной конференции “Цифровая обработка сигналов и ее применение “, 31 марта- 2 апреля 2004, Москва, Выпуск VI-1, Стр. 236-239.
11. Е.И. Кренгель.: “Новые почти идеальные и нечетно-идеальные периодические троичные последовательности”, Сборник докладов 10-й Международной НТК" Радиолокация, навигация и связь", 13-15 апреля 2004, Воронеж, Том 1, стр. 328-335.
12. Mow W.H.: “Even-odd transformation with application to multi-user CW radars”, 1996 IEEE 4 th International Simposium on Spread Spectrum Techniques and Applications Proceedings, September 22-25, Mainz, Germany, pp.191-193.