

## МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИССЛЕДОВАНИЕ ЦЕПИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНО СОЕДИНЕННЫХ ГЕНЕРАТОРОВ С ПОМОЩЬЮ АППАРАТА МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ

Казаков Л.Н., Якимов И.М.

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

Задача взаимодействий нескольких последовательно соединенных генераторов является классической для теории колебаний. Цепочки из генераторов нашли свое применение в различных областях радиотехники, в том числе в схемах стабилизации частоты и устройствах частотного синтеза. Отдельно следует выделить применение систем этого типа в качестве цепей синхронизации, используемых для обеспечения синхронной работы частей радиотехнических сетей передачи информации. К ним относятся, например, сети передачи данных синхронной цифровой иерархии (СЦИ, SDH) [1].

Широкий круг применения цепей последовательно соединенных генераторов обуславливает интерес к ним со стороны исследователей и разработчиков. В ряде случаев особо важны статистические характеристики сигналов на выходе такой цепи. Как показано в некоторых работах [1], иногда низкое качество этого сигнала может привести к потере работоспособности всей системы, составной частью которой является цепь последовательно соединенных генераторов. В связи с этим изучение этого класса устройств является весьма актуальным. Однако его исследование связано с рядом трудностей, в первую очередь математических. Цепь последовательно соединенных генераторов является нелинейной системой, поэтому большинство аппаратов исследования поведения радиотехнических устройств неприменимо к ней, или применимо с ограничениями. Другим препятствием на пути изучения цепей последовательно синхронизируемых генераторов является комбинированный характер воздействий на систему. Зачастую при исследовании качества работы цепи приходится учитывать не только аддитивные широкополосные помехи, но и фазовые флуктуации сигналов генераторов, которые могут иметь достаточно сложный характер.

В этой связи целью работы является построение математической модели цепи последовательно соединенных генераторов, а так же методики исследования статистических характеристик сигнала на ее выходе с учетом нелинейных свойств системы и характера флуктуационных воздействий. В качестве схем соединения генераторов в цепи выбраны дискретные системы фазовой синхронизации (СФС). Эти устройства часто применяются в данной роли. При исследовании, кроме аддитивного широкополосного шума, учитывалось наличие фазовых флуктуаций сигналов. Моделью последних служит близкий к белому частотный шум. Кроме того, в работе проведено исследование дисперсии фазовых флуктуаций на выходе цепи последовательно соединенных генераторов.

Модель цепи построена на основе аппарата марковских процессов. Применению этого аппарата к исследованию дискретных СФС посвящено много работ, в том числе и [2]. Однако несмотря на это существует ряд препятствий к использованию ранее полученных результатов для анализа цепей генераторов. В первую очередь это связано с тем, что в имеющихся работах проводится в основном исследование характеристик фазовой ошибки, тогда как при исследовании цепей последовательно соединенных генераторов интерес представляют фазовые флуктуации выходного сигнала звена цепи, которые одновременно являются фазовыми флуктуациями входного сигнала следующего звена. Во-вторых, применение аппарата марковских процессов возможно только в том случае, когда модель системы может быть сведена к марковскому виду. В случае наличия комплексных флуктуационных воздействий эта задача остается открытой.

В работе представлена методика получения ПРВ фазовых флуктуаций выходного сигнала дискретной СФС, основанная на повышении размерности пространства состояний. К стандартному уравнению системы фазовой синхронизации, записанному в терминах фазовой ошибки, добавляется уравнение, описывающее фазовые флуктуации входного сигнала. Так для бесфильтровой дискретной СФС получается следующая система уравнений:

$$\begin{cases} \varphi[k+1] - \varphi[k] = T \cdot \Omega_n + \eta[k] - \eta_{n2}[k] - T \cdot \Omega_y \cdot F(\varphi[k]) - T \cdot S \cdot n[k], \\ \xi[k+1] = \xi[k] + \eta[k] \end{cases}, \quad (1)$$

где  $\varphi$  – фазовая ошибка,  $\xi$  – фазовые флуктуации входного сигнала,  $\eta$  – его частотные флуктуации,  $\eta_{n2}$  – частотные флуктуации сигнала свободного перестраиваемого генератора (ПГ),  $n$  – аддитивный широкополосный шум, пересчитанный внутрь кольца,  $\Omega_y$  – полоса удержания СФС,  $\Omega_n$  – начальная частотная расстройка,  $S$  – крутизна характеристики ПГ,  $T$  – период дискретизации. Система (1) описывает марковский процесс. Для него может быть построено векторное уравнение Колмогорова–Чепмена (КЧ), описывающее динамику изменения совместной ПРВ координат  $W_k(\varphi, \xi)$ . Такое уравнение называется в работе расширенным, поскольку оно получено для расширенного пространства состояний. С помощью  $W_k(\varphi, \xi)$  может быть получена ПРВ фазовых флуктуаций выходного сигнала, которые представимы в виде:

$$\varphi'_{n2}[k] = \xi[k] - \varphi[k].$$

Их ПРВ выражается из совместной ПРВ координат состояния системы с помощью формулы:

$$p_k(\varphi'_{n2}) = \int_{-\infty}^{\infty} W_k(\xi - \varphi'_{n2}, \xi) d\xi. \quad (2)$$

Из (1) видно, что для построения расширенного векторного уравнения КЧ требуется знание ПРВ не фазовых, а частотных флуктуаций сигнала на входе звена. Формула (2) не позволяет получить ее, поскольку связь между частотными и фазовыми флуктуациями выражается соотношением:

$$\eta[k] = \varphi'_{n2}[k+1] - \varphi'_{n2}[k].$$

Отсюда видно, что для определения частотных флуктуаций сигнала на выходе звена необходима совместная ПРВ фазовых флуктуаций в два соседних момента времени. Для ее определения используется следующий подход. С помощью расширенного векторного уравнения КЧ получается ПРВ координат состояния системы на определенном шаге  $k$ :

$$W_k(\vec{Q}) = \int_{\Theta} q(\vec{Q} | \vec{Z}) \cdot W_{k-1}(\vec{Z}) \cdot d\vec{Z}, \quad (3)$$

где вектор  $Z$  описывает состояние системы на  $k-1$ -ом шаге, вектор  $Q$  – на  $k$ -ом шаге, функция  $q(\cdot)$  представляет собой условную ПРВ перехода,  $\Theta$  – область интегрирования по переменным состояниям. Совместная ПРВ координат состояния системы на двух соседних шагах работы получается из  $W_k(\vec{Q}) = W(\vec{Q}_k)$  с помощью соотношения:

$$W(\vec{Q}_{k+1}, \vec{Q}_k) = q(\vec{Q}_{k+1} | \vec{Q}_k) \cdot W(\vec{Q}_k). \quad (4)$$

При помощи соотношений вида (2) из (4) получается искомая совместная ПРВ фазовых флуктуаций в два соседних момента времени.  $W(\varphi'_{n2}[k+1], \varphi'_{n2}[k])$ . Из нее получается ПРВ частотных флуктуаций выходного сигнала:

$$p(\eta[k]) = \int_{-\infty}^{\infty} W(\varphi'_{n2}[k] + \eta[k], \varphi'_{n2}[k]) \cdot d\varphi'_{n2}[k]. \quad (5)$$

В работе получены расширенные векторные уравнения КЧ (3), а так же уравнения преобразования ПРВ координат состояния системы в ПРВ выходных координат (2) и (5) для дискретных СФС 1-го и 2-го порядков. На основе полученных моделей одиночных звеньев построена модель цепи последовательно соединенных посредством дискретных СФС генераторов. Она представляет собой систему расширенных векторных уравнений КЧ (3) и уравнений преобразования ПРВ (2) и (5):

$$\left\{ \begin{array}{l} W_{k+1}(\vec{Q}_1) = \int q'_1(\vec{Q}_1 | \vec{Z}_1) \cdot W_k(\vec{Z}_1) \cdot d\vec{Z}_1 \\ p_k(\varphi'_{n21}) = \int_{\Lambda} W_k(\vec{Q}_1) \\ p_k(\eta_2) = M[W_k(\vec{Q}_1)] \\ \dots = \dots \\ W_{k+1}(\vec{Q}_N) = \int q'_N(\vec{Q}_N | \vec{Z}_N) \cdot W_k(\vec{Z}_N) \cdot d\vec{Z}_N \\ p_k(\varphi'_{n2N}) = \int_{\Lambda} W_k(\vec{Q}_N) \\ p_k(\eta_{N+1}) = M[W_k(\vec{Q}_N)] \end{array} \right. , \quad (6)$$

где оператор  $L$  осуществляет преобразование (2), оператор  $M$  осуществляет преобразования (4) и (5),  $\Lambda$  – область интегрирования. Модель (6) позволяет исследовать статистические характеристики фазовых и частотных флуктуаций на выходе цепи произвольной длины. Алгоритм анализа такой цепи сводится к следующему. Для текущего звена определяются параметры входных воздействий. С помощью решения векторного уравнения КЧ находятся плотности распределения вероятности координат состояния системы на следующем шаге работы. Затем производится преобразование ПРВ данных координат в ПРВ фазовых флуктуаций выходного сигнала и определяются статистические характеристики этого процесса. Отметим, что при данных входных воздействиях он не является стационарным, его дисперсия увеличивается со временем. Таким образом построенная модель позволяет анализировать нестационарные процессы в системе. Затем с помощью описанных преобразований определяется ПРВ частотных флуктуаций выходного сигнала звена. Исходя из нее, находится условная ПРВ перехода координат системы для следующего звена и для него выполняется аналогичная процедура. Когда таким образом достигнут конец цепи, алгоритм повторяется для следующего шага работы системы.

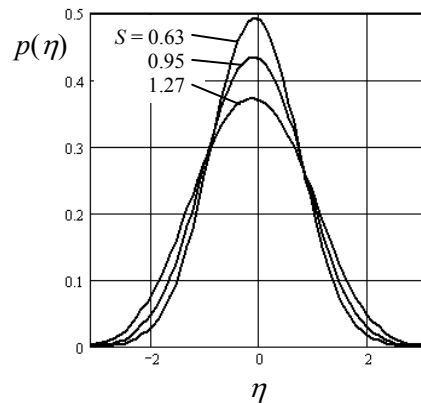


Рис. 1. ПРВ частотных флуктуаций сигнала на выходе звена цепи при  $\sigma_\eta = 0.1$ ,  $\sigma_n = 0.1$ ,  $\sigma_{\eta n_2} = 0.7$ .

С помощью указанного алгоритма проведено исследование цепи последовательно соединенных генераторов. Получены ПРВ частотных и фазовых флуктуаций сигналов на выходе цепи (рис. 1) и зависимости дисперсии фазовых флуктуаций выходного сигнала от параметров звеньев цепи (рис. 2). Цифрами на последнем графике обозначены длины цепи, которым соответствуют кривые. Как видно из рисунка, с ростом длины цепи дисперсия фазовых флуктуаций выходного сигнала увеличивается, что обусловлено эффектом "накопления" шумов. Кроме того, кривая 1 на рис. 2 показывает, что возможно наличие оптимального значения параметров звеньев, при котором уровень дисперсии фазовых флуктуаций выходного сигнала будет минимален.

В работе проведено исследование и сравнение двух алгоритмов оптимизации цепи: гомогенного и позвенного [3]. В первом случае настраиваются параметры сразу всех ячеек цепи, во втором – только текущей ячейки. Показано, что при малых длинах цепи позвенный алгоритм позволяет получить лучшие результаты по сравнению с гомогенным.

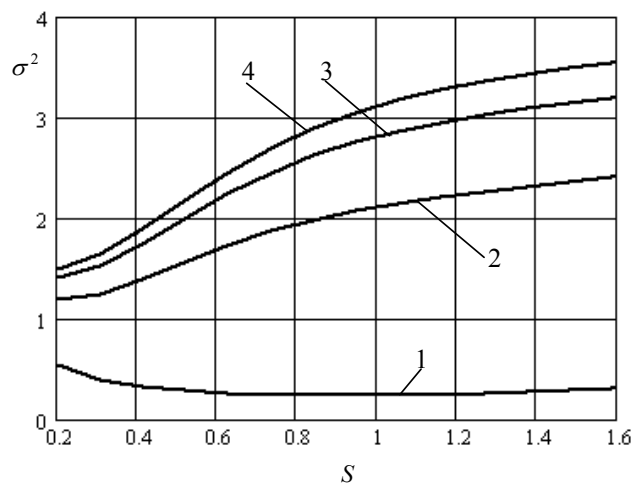


Рис. 2. Зависимость дисперсии фазовых флуктуаций выходного сигнала цепи от параметра  $S$  звеньев при позвенной оптимизации для  $\sigma_\eta = 0.1$ ,  $\sigma_n = 0.1$ ,  $\sigma_{\eta n_2} = 0.4$ .

Построенная в работе модель, а так же методики ее анализа, могут быть использованы при исследовании цепей последовательно соединенных дискретных СФС и отдельных их звеньев в случае, когда интерес представляют характеристики фазы и частоты выходного сигнала. Полученные результаты могут использоваться для настройки цепей последовательно соединенных генераторов.

#### Литература

1. Брени С. Синхронизация цифровых сетей связи. – М.: Мир, 2003.
2. Тихонов В.И., Миронов М.А. Марковские процессы. – М.: Советское радио, 1977.
3. Казаков Л.Н., Якимов И.М. Оптимизация цепи последовательно синхронизируемых генераторов различных уровней. // Цифровая обработка сигналов и ее применение: Сборник докладов 6-й международной конференции, 31 марта – 2 апреля 2004 г. – Москва, 2004. – Т. 2. – С. 222–225.

