ПОВЫШЕНИЕ ТОЧНОСТИ ОЦЕНКИ МОМЕНТА ПРИХОДА ИМПУЛЬСНОГО СИГНАЛА

Латышев В.В., Никерова О.А.

Московский государственный авиационный институт
(технически университет), Россия, E-mail: lvv@mai.ru

В настоящее время синтез алгоритмов оценивания чаще всего основывается на методе максимального правдоподобия, предложенном Фишером [1]. С тех пор он широко используется в статистической теории оценивания из-за относительной простоты составления и решения уравнений правдоподобия. Применять метод максимального правдоподобия для оценки момента прихода сигнала, впервые предложил Вудворд [2]. В случае детерминированного сигнала, искаженного белым гауссовским шумом, метод максимального правдоподобия приводит к использованию согласованного фильтра Норта [3]. Положение максимального значения его выходного сигнала на оси времени с учетом задержки в фильтре дает оценку момента прихода ожидаемого сигнала. В то же время из теории хорошо известно, что метод максимального правдоподобия при оценивании параметров сигналов не всегда, более того, чаще всего не приводит к наилучшим по точности результатам [4, 5]. В частности, в [6] отмечается, что согласованная фильтрация, предшествующая процедуре оценивания, может значительно ухудшить точность оценок по сравнению с теоретическим пределом Крамера-Рао, причем ухудшение может составить порядок величины и более.

Для иллюстрации рассмотрим распространенную аддитивную модель приема известного сигнала $s(t-\tau)$ в белом гауссовском шуме $n(t)$ с двусторонней спектральной плотностью мощности $N_0/2$:

$$x(t) = s(t-\tau) + n(t). \tag{1}$$

Сигнал имеет конечную длительность T. Неизвестным является время прихода τ, которое требуется определить. В качестве сигнала возьмем из [5] импульс вида

$$s(t) = \begin{cases} 1-\cos\left(\dfrac{2\pi}{T}t\right), & 0 \le t \le T, \\ 0, \quad t<0, \quad \textit{или} \quad t>T. \end{cases} \tag{2}$$

Такой сигнал удобен тем, что имеет производные любого порядка и не создает на фронтах эффект сингулярности, следовательно, можно легко рассчитать границу Крамера – Рао для оценки точности определения момента прихода.

На рис.1 представлены результаты статистического моделирования оценки момента прихода импульса (2) с использованием согласованного фильтра. В эксперименте сигнал с нормированной длительностью $T=1$ размещался в середине интервала наблюдения $T_u = 8$. Период дискретизации $T_0 = 2^{-10}$. После добавления гауссовского шума с независимыми отсчетными значениями полученная выборка в каждом цикле обработки подвергалась дискретному преобразованию Фурье и умножалась на комплексную частотную характеристику согласованного фильтра с последующим обратным дискретным преобразованием Фурье. Оценка смещения сигнала определялась по положению глобального максимума. Каждая точка представленных на рис.1 результатов получена в результате 10^4 повторений указанных циклов оценивания. Для сравнения на этом же рисунке показаны предельные значения дисперсии оценки τ, соответствующие границе Крамера-Рао.

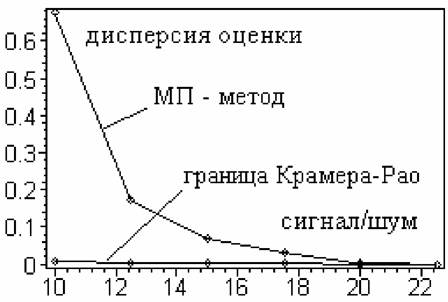

Рис.1.

Анализ результатов наглядно показывает свойства оценки максимального правдоподобия. С увеличением отношения сигнал/шум дисперсия оценки τ приближается к потенциальной границе Крамера-Рао. Этот эффект соответствует представлению оценок максимального правдоподобия, как асимптотически оптимальных [4]. С другой стороны, начиная с некоторого значения интенсивности помех разница между реальной дисперсией оценки и ее потенциальной границей достаточно быстро возрастает – пороговый эффект, объясняемый появлением аномальных ошибок [5,7]. Таким образом, как теоретические, так и экспериментальные результаты демонстрируют, что эффективность алгоритмов оценивания, синтезируемых на основе принципа максимального правдоподобия, может быть далекой от потенциальной границы Крамера-Рао. Далее рассмотрим возможный подход к синтезу более эффективных алгоритмов оценивания.

Прежде всего, учтем, что задача оценивания обычно решается после обнаружения сигнала или одновременно с ним, поэтому при дальнейшем изложении будем считать достоверным наличие ожидаемого сигнала в наблюдении, кроме того, известным примерное его размещение на оси времени. Проблема заключается в уточнении его местоположения в условиях существующих искажений. Совместим начало координат с началом импульсной характеристики фильтра. Положим закон распределения τ равномерным на промежутке $[-T,T]$. Такое допущение соответствует реальным условиям работы следящих измерителей с временными дискриминаторами, формирующими ошибку рассогласования.

Представленный выше пример показывает наличие резерва в повышении точности оценивания. Вопрос заключается в том, как этот резерв использовать. Здесь можно выделить две проблемы, решение которых ведет к ответу на указанный вопрос. Первая – нахождение статистики, не связанной с потерей фишеровской информации о задержке сигнала. Вторая – нахождение конкретного алгоритма оценивания, характеризующегося лучшей по сравнению с методом максимального правдоподобия точностью. В принципе в литературе известны решения указанных проблем. Так в [4,6,7] утверждается, что при оценке задержки сигнала, искаженного белым шумом, искомая статистика получается в результате пропускания наблюдений через фильтр с импульсной характеристикой, пропорциональной производной ожидаемого сигнала. Алгоритм оценки заключается в определении момента прохождения выходного сигнала этого фильтра через нулевой уровень. При таком подходе характеристика дискриминатора обладает наибольшей крутизной, что является необходимым условием достижения высокой точности оценки. Однако, эти рекомендации по формированию интересующей нас статистики не реализуют полностью возможности по сохранению фишеровской информации о задержке сигнала и можно получить лучшие результаты. Для этой цели можно воспользоваться предложенным в [8] ортогональным разложением предъявляемого сигнала с сохранением фишеровской информации и получить векторную достаточную статистику, представляющую собой выходные сигналы двух фильтров с импульсными характеристиками, пропорциональными функциям:

$$\varphi_1(t)=\sqrt{\frac{2}{T}}\sin\frac{2\pi}{T}t,\quad 0\le t\le T,\qquad \varphi_2(t)=\sqrt{\frac{2}{T}}\cos\frac{2\pi}{T}t,\quad 0\le t\le T. \tag{3}$$

Проекция наблюдаемого сигнала на эти две функции гарантирует линейное преобразование наблюдаемого сигнала в двумерный вектор без потерь фишеровской информации о τ [9]. Этот вектор можно рассматривать как векторную достаточную статистику для оценки τ. Достаточность статистики здесь будем понимать в смысле полного сохранения среднего количества фишеровской информации о задержке сигнала.

Для характеристики свойств такой векторной достаточной статистики можно рассчитать количество средней информации по Фишеру о τ, содержащейся в отдельных ее компонентах [9]:

$$I_1(\tau)=\frac{4\pi^2}{N_0T}\cos^2\frac{2\pi}{T}\tau,\qquad I_2(\tau)=\frac{4\pi^2}{N_0T}\sin^2\frac{2\pi}{T}\tau \tag{4}$$

Видно, что при использовании ортогонального разложения по функциям (3) образуются два квадратурных слагаемых фактически с одинаковым информационным содержанием, так как средние $I_1(\tau)$ и $I_2(\tau)$ равны. Заметим, что их сумма является константой.

Интересно сравнить полученный результат с известным из теории. Первая из функций (3) обеспечивает получение статистики, характеризуемой в [4,6,7] как оптимальная для оценки τ. Что касается второй функции $\varphi(t)$, то она предоставляет дополнительный информационный канал, равноценный по количеству фишеровской информации о τ первому. Наличие дополнительного канала обеспечивает информационную избыточность, которую можно использовать для повышения точности измерения τ. Причем ортогональность каналов гарантирует некоррелированность оценок по каждому из них с одинаковыми средними дисперсиями ошибок. В этой ситуации напрашивается комплексирование каналов, которое в данном случае можно свести к простому усреднению результатов оценок.

Эффект, достигаемый при таком комплексировании, иллюстрируется на рис.2. Неопределенность в положении импульса для показанных результатов составляла $\pm 0{,}25T$. Точность оценивания с использованием выходного сигнала согласованного фильтра характеризуется кривой, помеченной как МП-оценка. Под оптимальным дискриминатором понимается оценка, получаемая в точке пересечения нулевого уровня выходным сигналом фильтра, с импульсной характеристикой, равной производной сигнала (2). Из рисунка видно, что при высоких отношениях сигнал/шум все оценки примерно одинаковы. При ухудшении отношения сигнал/шум преимущество оказывается за предложенным подходом.

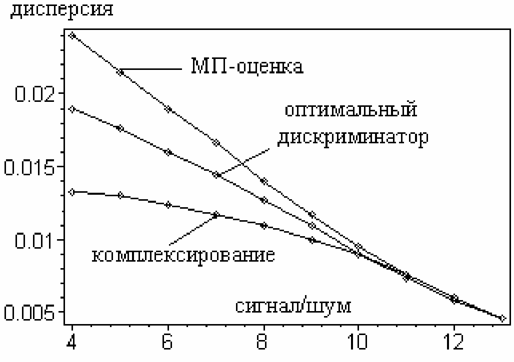

Рис.2

Литература

1. R.A. Fisher. Contributions to mathematical statistics, Wiley, New York, 1950.
2. Вудворд Ф. М. Теория вероятностей и теория информации с применением в радиолокации. – М.: Советское радио, 1955.
3. North D. O. // Proc. IEEE, 1963. V.51. №7. P.1016.
4. Сосулин Ю. Г. Теоретические основы радиолокации и радионавигации: Учебное пособие для вузов. – М.: Радио и связь, 1992.
5. Ван Трис Г. Теория обнаружения, оценок и модуляции. - М.: Советское радио,1972.
6. Mallinckrodt A.J., Sollenberger T.E. Optimum-Pulse-Time Determination. Trans. IRE, 1954, v.PGIT-3, March., p.151-159.
7. Тихонов В. И. Оптимальный прием сигналов. – М.: Радио и связь, 1983.
8. Латышев В. В. // Радиотехника и электроника. 1988. Т.33. №3. с.635-637.
9. Латышев В. В. // Радиотехника и электроника. 2004. Т.49. №9. с.1084-1092.