МАТРИЧНЫЕ АЛГОРИТМЫ БЫСТРОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ХАРТЛИ ПО РАЗЛИЧНЫМ ОСНОВАНИЯМ, А ТАКЖЕ ПО СМЕШАННОМУ ОСНОВАНИЮ

Злобин С.Л., Стальной А.Я.
ОАО НПО «Алмаз» им. акад. А. Расплетина

В цифровой обработке сигналов (ЦОС) стало широко использоваться преобразование Хартли [1], тесно связанное с преобразованием Фурье. По определению преобразование Хартли предназначено для обработки массивов действительных чисел, ядро преобразования чисто вещественное.

Дискретное преобразование Хартли (ДПХ), как и ДПФ, применяется в задачах спектрального анализа и цифровой фильтрации [1]. В ДПХ данные обрабатываются только в области вещественных чисел. Прямое и обратное преобразования Хартли не имеют различий, они взаимно симметричны. ДПХ представляет собой модификацию ДПФ в плоскости вещественной переменной [1], эти преобразования связаны взаимно однозначными соотношениями.

Преобразование Хартли так же, как и преобразование Фурье, имеет свои алгоритмы быстрого преобразования (БПХ), исследование которых представляет существенный интерес.

В [2] описан матричный рекуррентный алгоритм БПХ по основанию 2. Этот алгоритм отличают следующие особенности:

1. Входные и выходные отсчёты представляются в естественном порядке адресации (следования). Нет необходимости в специальной операции двоично–инверсной перестановки.
2. Алгоритм допускает использование всего $N/2$ весовых коэффициентов $C(k)$ и $S(k)$, что экономит программные (аппаратные) ресурсы.
3. Алгоритм нагляден и компактен, отличается регулярностью и простотой организации вычислительного процесса БПХ для массивов произвольной размерности N, где $N = 2^r$.
4. Матричная интерпретация алгоритма и привлечение аппарата арифметики блочных матриц позволяют оперировать непосредственно с блоками данных. Так как блоки можно формировать произвольным образом, то их длина будет однозначно определять уровень параллелизма архитектуры алгоритма.
5. Матричная формализация алгоритма позволяет использовать в качестве графической интерпретации простой и наглядный метод матричных диаграмм.
6. Алгоритм легко программируется на ЭВМ, имеет простую матричную запись.

Однако, на практике часто размерность обрабатываемого массива данных N не является степенью числа 2. Например, число строк телевизионного изображения может составлять 525 или 625. Временные ряды, возникающие в геофизических исследованиях, астрономических наблюдениях могут содержать произвольное число элементов. Тогда приходится исключать некоторое количество элементов (это потеря информации), либо дополнять исходный массив нулями до ближайшего значения $N = 2^r$, что ведёт к лишним затратам вычислительных ресурсов на обработку нулей.

Применив системный подход к синтезу структуры матричных алгоритмов по любому основанию, авторы представляют ряд вычислительных матричных алгоритмов БПХ по различным основаниям $b = 3,4,5,7$, а также по смешанному основанию.

Рассмотрим процесс выполнения матричного алгоритма БПХ по смешанному основанию при длине обрабатываемого массива $N = 5^1 \cdot 4^1 \cdot 3^2 \cdot 2^2 = 720$. При этом требуется выполнить 1 итерацию по основанию 5, затем 1 итерацию по основанию 4, 2 итерации по основанию 3 и 2 итерации по основанию 2. Всего необходимо выполнить 6 итераций. Формализованную матричную запись преобразования (в виде упрощённых матричных диаграмм) можно представить следующим образом:

$\mathbf{X}_{\mathrm{p}}^{5\mathrm{t}} = \left[\mathbf{A}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{t}} \mid \mathbf{B}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{t}} \mid \mathbf{C}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{t}} \mid \mathbf{D}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{t}} \mid \mathbf{E}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{t}}\right]$ — исходный массив данных;

1. <u>1–ая итерация (основание 5)</u>;

$p = 1$; $t = N/5 = 144$

$$\text{БПХ}_5^1\left(\mathbf{X}_{\mathrm{p}}^{5\mathrm{t}}\right) = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{t}} \\ \hline \mathbf{G}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{t}} \\ \hline \mathbf{H}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{t}} \\ \hline \mathbf{X}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{t}} \\ \hline \mathbf{Y}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{t}} \end{bmatrix} = \mathbf{Y}_{5\mathrm{p}}^{\mathrm{t}}$$

2. <u>2–ая итерация (основание 4)</u>;

$\mathbf{Y} = \left[\mathbf{A}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{t}} \mid \mathbf{B}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{t}} \mid \mathbf{D}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{t}} \mid \mathbf{E}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{t}}\right]$; $p = 5$; $t = N/4p = 36$

$$\text{БПХ}_4^1\left\{\left[\mathbf{A}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{t}} \mid \mathbf{B}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{t}} \mid \mathbf{D}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{t}} \mid \mathbf{E}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{t}}\right]\right\} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{t}} \\ \hline \mathbf{G}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{t}} \\ \hline \mathbf{H}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{t}} \\ \hline \mathbf{X}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{t}} \end{bmatrix} = \mathbf{Y}_{4\mathrm{p}}^{\mathrm{t}}$$

3. <u>3–я итерация (основание 3)</u>;

$\mathbf{Y} = \left[\mathbf{A}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{t}} \mid \mathbf{B}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{t}} \mid \mathbf{D}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{t}}\right]$; $p = 20$; $t = N/3p = 12$

6. <u>6–ая итерация (основание 2)</u>.

$\mathbf{Y} = \left[\mathbf{A}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{t}} \mid \mathbf{B}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{t}}\right]$; $p = 360$; $t = 1$

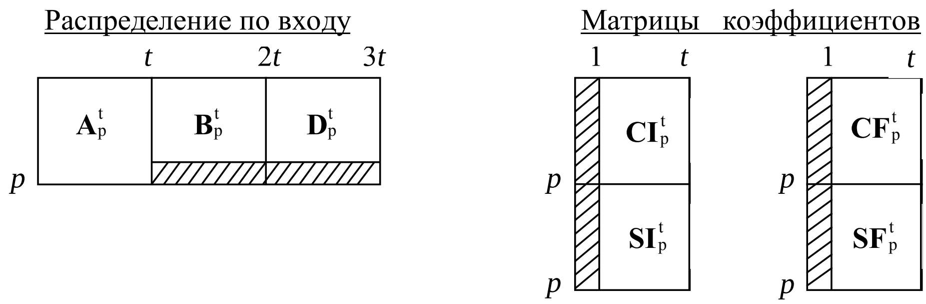
$$\text{БПХ}_3^1\left\{\left[\mathbf{A}_p^t \,|\, \mathbf{B}_p^t \,|\, \mathbf{D}_p^t\right]\right\} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_p^t \\ \hline \mathbf{G}_p^t \\ \hline \mathbf{H}_p^t \end{bmatrix} = \mathbf{Y}_{3p}^t \qquad \text{БПХ}_2^1\left\{\left[\mathbf{A}_p^t \,|\, \mathbf{B}_p^t\right]\right\} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_p^t \\ \hline \mathbf{G}_p^t \end{bmatrix} = \mathbf{Y}_{2p}^t$$

$\mathbf{Y}$ — результирующая матрица на каждой итерации и исходная для последующей; $\text{БПХ}_b^1(\mathbf{W})$ — оператор матричного БПХ, выполняющий 1 итерацию по основанию $b = 5,4,3,2$.

Полное количество операций сложения A и умножения M выражаются формулами:

$A_5 = 24\cdot(N/5) = 3456$; $M_5 = 24\cdot(N/5) = 3456$; 1 итерация по основанию 5;
$A_4 = 13\cdot(N/4) = 2340$; $M_4 = 10\cdot(N/4) = 1800$; 1 итерация по основанию 4;
$A_3 = [10\cdot(N/3)]\cdot 2 = 4800$; $M_3 = [10\cdot(N/3)]\cdot 2 = 4800$; 2 итерации по основанию 3;
$A_2 = [3\cdot(N/2)]\cdot 2 = 2160$; $M_2 = [2\cdot(N/2)]\cdot 2 = 1440$; 2 итерации по основанию 2;
$A_\Sigma = 12756$; $M_\Sigma = 11496$; общее число сложений и умножений;
$A_\Sigma + M_\Sigma = 24252$ — суммарное количество арифметических операций.

В качестве примера рассмотрим матричный алгоритм БПХ по основанию 3.



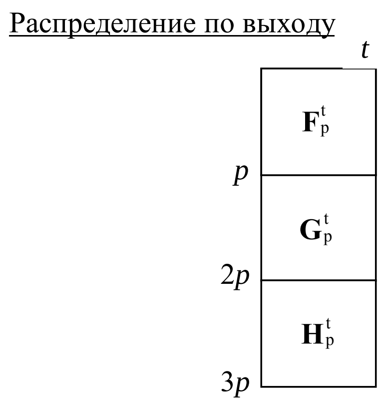


Рис. 1. Матричные диаграммы алгоритма БПХ по основанию 3 с прореживанием по времени.

Графическая интерпретация алгоритма приведена на рис.1 в виде матричных диаграмм.
Формульная запись матричного алгоритма БПХ по основанию 3 имеет вид:

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_p^t &= \mathbf{A}_p^t + \mathbf{B}_p^t * \mathbf{CI}_p^1 + \underline{\mathbf{B}}_p^t * \mathbf{SI}_p^1 + \mathbf{D}_p^t * \mathbf{CF}_p^1 + \underline{\mathbf{D}}_p^t * \mathbf{SF}_p^1; \\
\mathbf{G}_p^t &= \mathbf{A}_p^t - \beta\cdot\left(\mathbf{B}_p^t * \mathbf{CI}_p^1 + \underline{\mathbf{B}}_p^t * \mathbf{SI}_p^1 + \mathbf{D}_p^t * \mathbf{CF}_p^1 + \underline{\mathbf{D}}_p^t * \mathbf{SF}_p^1\right) + \\
&\quad - \alpha\cdot\left(\mathbf{B}_p^t * \mathbf{SI}_p^1 - \underline{\mathbf{B}}_p^t * \mathbf{CI}_p^1 - \mathbf{D}_p^t * \mathbf{SF}_p^1 + \underline{\mathbf{D}}_p^t * \mathbf{CF}_p^1\right); \\
\mathbf{H}_p^t &= \mathbf{A}_p^t - \beta\cdot\left(\mathbf{B}_p^t * \mathbf{CI}_p^1 + \underline{\mathbf{B}}_p^t * \mathbf{SI}_p^1 + \mathbf{D}_p^t * \mathbf{CF}_p^1 + \underline{\mathbf{D}}_p^t * \mathbf{SF}_p^1\right) + \\
&\quad + \alpha\cdot\left(\mathbf{B}_p^t * \mathbf{SI}_p^1 - \underline{\mathbf{B}}_p^t * \mathbf{CI}_p^1 - \mathbf{D}_p^t * \mathbf{SF}_p^1 + \underline{\mathbf{D}}_p^t * \mathbf{CF}_p^1\right),
\end{aligned} \qquad (1)$$

где $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{D}, \underline{\mathbf{B}}, \underline{\mathbf{D}}$ — пять входных матриц; $\mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{H}$ — три выходные матрицы;
$\mathbf{CI}_p^t, \mathbf{SI}_p^t, \mathbf{CF}_p^t, \mathbf{SF}_p^t$ — четыре матрицы весовых коэффициентов;
$p = 3^{m-1}$, $t = 3^{r-m}$, $m = 1,2,3,\ldots,r$; p и t — размерности матриц на разных итерациях;
$\mathbf{CI}_p^1, \mathbf{SI}_p^1, \mathbf{CF}_p^1, \mathbf{SF}_p^1$ — первые вектор–столбцы матриц весовых коэффициентов;
$\alpha = \sin(\pi/3)$ и $\beta = \cos(\pi/3)$ — коэффициенты усиления;
r — число итераций; m — номер итерации; N — длина исходного массива, $N = 3^r$.

$\mathbf{B}_p^t * \mathbf{CI}_p^1$ — поэлементное (статическое) умножение столбцов матрицы **B** на вектор–столбец $\mathbf{CI}_p^1$; $\underline{\mathbf{B}}$, и $\underline{\mathbf{D}}$ — зеркальные (инверсные) матрицы, получены из **B** и **D** путём инверсии строк.

Входная действительная последовательность имеет вид строки длиной N, результирующий спектр Хартли представляется в естественном порядке следования в виде вектор–столбца размерностью N. Преобразование осуществляется за $r = \log_3 N$ итераций. На каждой итерации выполняется $N/3$ базовых операций алгоритма — «бабочек». Полное количество операций сложения A_3 и умножения M_3 алгоритма выражаются формулами:

$$A_3 = (10/3)\cdot N\cdot(\log_3 N - 1) + 2\cdot N; \qquad M_3 = (10/3)\cdot N\cdot(\log_3 N - 1) + 2\cdot N/3. \qquad (2)$$

В заключение отметим, что полученный матричный алгоритм БПХ (и БПФ) по смешанному основанию позволяет обрабатывать массивы самой различной длины (некратные 2). Отпадает необходимость в дополнении исходного массива нулями до ближайшего значения $N = 2^r$ или в исключении некоторого количества элементов массива. Полученный матричный алгоритм по смешанному основанию отличают следующие особенности:

1. Входные и выходные отсчёты представляются в естественном порядке адресации (следования). Нет необходимости в операциях цифро–инверсных перестановок.
2. Натуральные числа n_i, которые входят в качестве сомножителей с некоторыми целыми неотрицательными степенями в смешанное произведение $N = n_1\cdot n_2\cdot n_3\cdot\ldots$ (N — длина исходного массива) могут быть любыми, не обязательно взаимно–простыми, как, например, в алгоритме Винограда для длинной последовательности.
3. Алгоритм нагляден и компактен. Матричная формализация алгоритма не требует построения сложного вычислительного графа, и в качестве графической интерпретации позволяет использовать простой и наглядный метод матричных диаграмм.

ЛИТЕРАТУРА

1. Р.Н. Брейсуэлл, «Преобразование Хартли». Москва, «Мир», 1990.
2. С.Л. Злобин, А.Я. Стальной, «Матричный рекуррентный алгоритм быстрого преобразования Хартли с естественным порядком адресации входной и выходной информации». Радиотехника, № 4, апрель 2000 г.