СИНТЕЗ ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРОВ С КОНЕЧНОЙ РАЗРЯДНОСТЬЮ КОЭФФИЦИЕНТОВ

Лесников В.А., Наумович Т.В.
Вятский государственный университет

Классические методики синтеза цифровых фильтров (ЦФ) характеризуются тем, что на функциональном уровне представления передаточная функция рассчитывается без учета ограниченной точности представления коэффициентов. Возникающие при этом проблемы точности реализации характеристик ЦФ обычно решаются на более низких уровнях, в частности на структурном. Решение этой задачи затрудняется огромным количеством известных структурных решений в условиях отсутствия их систематизации и методик их перебора.

В данной работе предлагается методика, позволяющая решить проблемы обеспечения точности характеристик ЦФ уже на функциональном уровне. Структурный синтез в предлагаемой методике осуществляется целенаправленно на основе предложенного алгоритма генерации структур.

На рис. 1. представлена схема предлагаемого алгоритма.

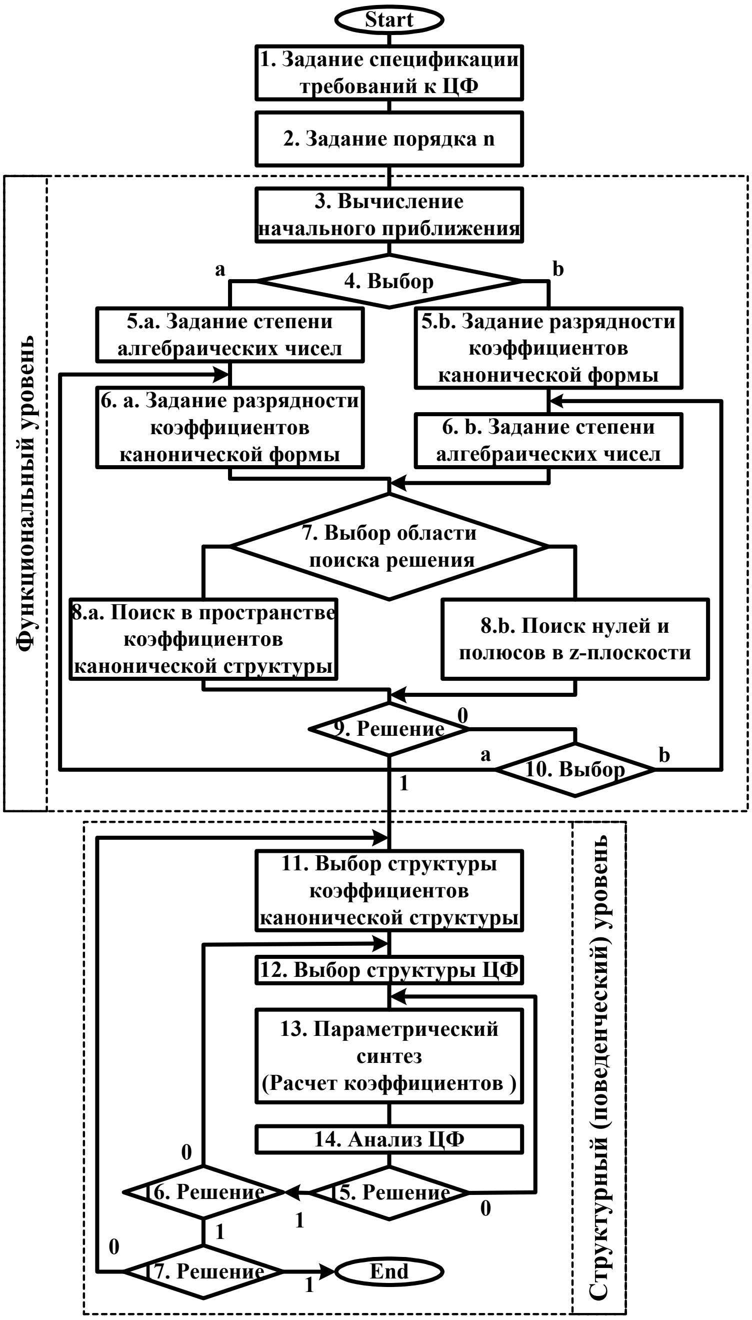

Рис. 1. Схема алгоритма

Задание спецификации требований к ЦФ (п. 1) и выбор значения порядка ЦФ $\mathbf{n}$ (п.2) – это традиционные этапы. Как обычно, требования к ЦФ задаются в частотной или временной области.

После задания требований к ЦФ выполняется синтез ЦФ на функциональном уровне (п.п. 3 – 10), под которым понимается определение нулей и полюсов (или коэффициентов передаточной функции) ЦФ.

В качестве начального приближения можно использовать (п. 3) результаты расчета передаточной функции без учета конечной разрядности коэффициентов ЦФ. Для упрощения процесса синтеза при расчете начального приближения можно пойти на завышение требований к ЦФ. Естественно, что при этом могут потребоваться дополнительные ресурсные затраты.

Передаточная функция реальных цифровых фильтров

$$\mathbf{H(z)} = \left(\sum_{i=0}^{n} \mathbf{a_i z^{n-i}}\right) / \left(\mathbf{z^n} - \sum_{i=1}^{n} \mathbf{b_i z^{n-i}}\right) \quad (1)$$

представляет собой отношение полиномов с рациональными коэффициентами $\mathbf{a_i}$, $\mathbf{b_i}$ от комплексной переменной $\mathbf{z}$. Поэтому нули $\mathbf{z_{zi}}, (\mathbf{i = 1,\dots,n})$ и полюсы $\mathbf{z_{pi}}, (\mathbf{i = 1,\dots,n})$ ЦФ являются элементами множества алгебраических чисел $\mathbf{K}$.

Очевидно, что максимально возможная степень алгебраических чисел, которые могут быть нулями и полюсами ЦФ, равна порядку ЦФ $\mathbf{n}$. В работах авторов [1, 3 и 4] показано, что степень алгебраических чисел (нулей и полюсов ЦФ) может быть меньшей, чем $\mathbf{n}$. Очевидно, что множество алгебраических чисел меньшей степени является подмножеством алгебраических чисел большей степени, т.е. $\mathbf{K_1 \subset K_2 \subset \dots \subset K_n \subset K}$.

В [1, 3 и 4] показано, что степень алгебраических чисел – нулей и полюсов ЦФ полностью определяется структурой ЦФ.

В работах авторов [1, 3, 4] показано, что квантование коэффициентов ЦФ приводит к дискретизации $\mathbf{z}$ - плоскости, т. е. нули и полюсы ЦФ могут принимать не произвольные, а вполне определенные значения. Эти значения формируют в $\mathbf{z}$ - плоскости дискретную структуру – геометрическое место точек, в которых могут располагаться нули и полюсы ЦФ при фиксированной длине мантиссы коэффициентов $\mathbf{a_i}$, $\mathbf{b_i}$.

Дискретная структура множества $\mathbf{K_2}$ хорошо изучена [5, 10, 11]. Поэтому в случае выбора множества $\mathbf{K_2}$ в качестве области определения нулей и полюсов ЦФ поиск решения можно вести как в $\mathbf{z}$ - плоскости (п.п. 7 – 8b - 9), так и в пространстве коэффициентов ЦФ (п.п. 7 – 8a - 9). В работах [5, 6, 12] исследована дискретная структура возможных положений в $\mathbf{z}$ - плоскости нулей и полюсов ЦФ, являющихся элементами множеств $\mathbf{K_g}$ при $\mathbf{g > 2}$. К сожалению, получить в этом случае аналитические выражения, позволяющие определить положение нулей и полюсов в $\mathbf{z}$ - плоскости, не удалось. Поэтому поиск решения целесообразно вести в пространстве коэффициентов ЦФ (п.п. 7 – 8a - 9). Однако в данном случае необходимо контролировать устойчивость ЦФ. Если для звеньев ЦФ второго порядка это не вызывает затруднений (необходимо, чтобы точки в плоскости коэффициентов не выходили за пределы треугольника устойчивости), то в случае звеньев большего порядка задача усложняется. В работе [5] введено понятие тела устойчивости в многомерном пространстве коэффициентов и получены выражения, позволяющие определить, находится ли данная точка внутри тела устойчивости.

Если на множестве $\mathbf{K_g}$ при данной разрядности мантисс $\mathbf{q_i}$ коэффициентов не удалось найти удовлетворительного решения (п. 10), то далее можно идти двумя путями. Во-первых, можно увеличить $\mathbf{q_i}$, оставив неизменным степень алгебраических чисел $\mathbf{g}$ (п.п. 10 – 6a). Во-вторых, можно увеличить $\mathbf{g}$ (п.п. 10 – 6b). Мощность множества определения нулей и полюсов во втором случае возрастает значительно быстрее, чем в первом. Однако и поиск решения при этом усложняется.

Как для поиска в пространстве коэффициентов (п. 8a), так и для поиска в $\mathbf{z}$ - плоскости (п. 8b) необходимо воспользоваться методами нелинейного дискретного программирования. В связи с тем, что в настоящее время алгоритмы решения этой задачи, учитывающие специфику синтеза ЦФ, еще не разработаны, приходится применять универсальные методы ветвей и границ.

После завершения этапа функционального синтеза, переходим к решению задачи выбора структуры ЦФ (п. п. 11 – 17). На структурном уровне описания (полагаем, что правильнее было бы называть этот уровень поведенческим) ЦФ описывается при помощи топологической матрицы $\mathbf{\hat{T}\left(z^{-1}\right)}$ размерностью $\mathbf{N \times N}$ ($\mathbf{N}$ - число узлов структурной схемы), элементами которой являются коэффициенты передачи между узлами структурной схемы:

$$\mathbf{\vec{Y}\left(z\right) = \hat{T}\left(z\right)\vec{Y}\left(z\right) + \vec{I}_{inp}X\left(z\right)}. \tag{2}$$

В уравнении (2) $\mathbf{\vec{Y}\left(z\right)}$ – вектор $\mathbf{z}$ - преобразований отсчетов, вычисляемых во всех узлах ЦФ; $\mathbf{\vec{I}_{inp}}$ - $\mathbf{N}$ -мерный вектор, все элементы которого равны $\mathbf{0}$ за исключением элемента с индексом $\mathbf{inp}$, равного $\mathbf{1}$; $\mathbf{inp}$ - номер входного узла; $\mathbf{X\left(z\right)}$ – $\mathbf{z}$ -преобразование входной последовательности ЦФ. Топологическую матрицу представим в виде суммы двух матриц, первая из которых $\mathbf{\hat{T}_c}$ содержит все элементы $\mathbf{\hat{T}\left(z^{-1}\right)}$, отличные от $\mathbf{z^{-1}}$, а отличные от нуля элементы второй матрицы $\mathbf{z^{-1}\hat{T}_d}$ равны $\mathbf{z^{-1}}$.

В работах [1, 3 и 4] показано, что между максимальной степенью алгебраических чисел, являющихся полюсами ЦФ, и структурой топологической матрицы, существует соответствие. Структура топологических матриц исследована в работах авторов [1 – 4, 7, 8, 11]. В результате этих исследований построена система нумерации и разработан алгоритм генерации всех возможных структур ЦФ [8, 9, 11, 13].

Топологическую матрицу $\mathbf{\hat{T}\left(z^{-1}\right)}$, такую, что $\mathbf{\hat{T}_c}$ является строго нижней треугольной, $\mathbf{\hat{T}_d}$ является строго верхней треугольной, в каждой строке и в каждом столбце матрицы $\mathbf{\hat{T}_d}$ содержится не более одного ненулевого элемента, будем называть ***канонической топологической матрицей***. Соответствующую структуру ЦФ будем называть ***канонической обобщенной структурой***.

Для любой канонической топологической матрицей топологической матрицы и соответствующей ей структуры авторами введено следующее обозначение (идентификатор структуры)

$$\mathbf{N\{N\}z\{n\}p\{P_1\}d\{N_1\}\ldots p\{P_n\}d\{N_n\}i\{inp\}o\{out\}}. \tag{3}$$

Вместо символов в фигурных скобках подставляются конкретные значения, характеризующие структуру ЦФ. $\mathbf{n}$ **-** число ненулевых элементов матрицы $\mathbf{\hat{T}_d}$ (число блоков задержки, порядок ЦФ). $\mathbf{P_i}$, $\mathbf{N_i}$

– числа, определяющие положение $\mathbf{n}$ квадратных подматриц $\widehat{\mathbf{T}}_{\mathbf{i}}\left(\mathbf{z}^{-1}\right)$ в матрице $\widehat{\mathbf{T}}\left(\mathbf{z}^{-1}\right)$, причем $\mathbf{P}_1 < \mathbf{P}_2 < \ldots < \mathbf{P}_{\mathbf{n}}$. Главные диагонали подматриц $\widehat{\mathbf{T}}_{\mathbf{i}}\left(\mathbf{z}^{-1}\right)$ лежат на главной диагонали матрицы $\widehat{\mathbf{T}}\left(\mathbf{z}^{-1}\right)$. Последние элементы первой строки подматриц равны $\mathbf{z}^{-1}$. Элементы с индексами $\left(\mathbf{P}_{\mathbf{i}}, \mathbf{P}_{\mathbf{i}}\right)$ матрицы $\widehat{\mathbf{T}}\left(\mathbf{z}^{-1}\right)$ являются элементами с индексами $(\mathbf{1,1})$ матрицы $\widehat{\mathbf{T}}_{\mathbf{i}}\left(\mathbf{z}^{-1}\right)$. $\mathbf{N}_{\mathbf{i}}$ - размерность подматриц. Выделим также квадратную подматрицу $\widehat{\mathbf{T}}_{\mathbf{0}}\left(\mathbf{z}^{-1}\right)$, которая является матрицей с минимальным порядком, включающей в качестве подматриц все матрицы $\widehat{\mathbf{T}}_{\mathbf{i}}\left(\mathbf{z}^{-1}\right)$. $\mathbf{out}$ - номер выходного узла.

Для любой структуры (3) можно рассчитать

$$\widehat{\mathbf{H}}\left(\mathbf{z}^{-1}\right) = \left\|\mathbf{H}_{\mathbf{ij}}\left(\mathbf{z}^{-1}\right)\right\| = \left(\mathbf{1}/\mathbf{X}(\mathbf{z})\right)\vec{\mathbf{Y}}(\mathbf{z}) = \left(\widehat{\mathbf{E}}_{\mathbf{N}} - \widehat{\mathbf{T}}\left(\mathbf{z}^{-1}\right)\right)^{-1} \qquad (4)$$

- матрицу передаточных функций ЦФ в случае, если узлы $\mathbf{j}$ и $\mathbf{i}$ являются соответственно входным и выходным узлами ЦФ ($\widehat{\mathbf{E}}_{\mathbf{N}}$ - $\mathbf{N}$-мерная единичная матрица). Проанализировав (4), можно показать, что для любого ЦФ все коэффициенты прямых и обратных связей $\mathbf{a_i}$ и $\mathbf{b_i}$ передаточной функции (1) равны сумме произведений соответствующих коэффициентов структуры (3).

В [2, 7] введено понятие структуры коэффициентов прямой связи $\vec{\mathbf{S}}_{\mathbf{a}} = \left(\mathbf{m}_{\mathbf{a0}}, \mathbf{m}_{\mathbf{a1}}, \ldots, \mathbf{m}_{\mathbf{an}}\right)$ и структуры коэффициентов обратной связи $\vec{\mathbf{S}}_{\mathbf{b}} = \left(\mathbf{m}_{\mathbf{b1}}, \ldots, \mathbf{m}_{\mathbf{bn}}\right)$, где $\mathbf{m}_{\mathbf{ei}}$ - максимальные числа сомножителей в произведениях, составляющих коэффициенты $\mathbf{e}_{\mathbf{i}}$. В [2, 7] показано, что ЦФ с низкой чувствительностью к точности представления коэффициентов имеют относительно большие значения $\mathbf{m}_{\mathbf{ei}}$. Поэтому, с учетом полученных на предыдущих этапах синтеза значений $\mathbf{g}$ и $\mathbf{q}_{\mathbf{i}}$, выберем структуру коэффициентов прямой и обратной связи (п. 11).

Эвристически авторам удалось получить формулы, позволяющие выразить некоторые значения $\mathbf{m}_{\mathbf{ei}}$ через параметры идентификатора структуры (3). Впрочем, легко получить структуру коэффициентов и путем предварительного непосредственного вычисления. Таким образом, можно получить идентификаторы структур, обладающих наименьшей сложностью (п. 12).

После выбора структуры, осуществляем параметрический синтез, т. е. расчет коэффициентов конкретной структуры ЦФ (элементов матрицы $\widehat{\mathbf{T}}_{\mathbf{c}}$), которые определяются ранее вычисленными значениями $\mathbf{a}_{\mathbf{i}}$ и $\mathbf{b}_{\mathbf{i}}$ (п. 13). К сожалению, эффективные алгоритмы параметрического синтеза в настоящее время не разработаны. Поэтому решение выполняется методом перебора. Дискретный характер задачи приводит к тому, что эта задача может иметь множество решений. Эту множественность можно использовать для выбора коэффициентов с минимальной разрядностью целой части и для уменьшения шумов округления.

Рассчитанные значения коэффициентов конкретной структуры позволяют выполнить анализ ЦФ (п. 14), по результатам которого либо выбирается другая структура (п. п. 15 – 16 - 12), либо выбирается новая структура коэффициентов (п. п. 15 – 16 – 17 – 11).

Таким образом, в данной работе предложена новая методика синтеза ЦФ, которая позволяет исключить неопределенности, связанные с обеспечением заданной точности характеристик ЦФ в условиях ограниченной точности представления коэффициентов. Еще одной особенностью данного алгоритма является использование целенаправленной генерации вариантов структурных схем. Предложенная методика нуждается в дальнейшем совершенствовании – повышении вычислительной эффективности поиска нулей и полюсов (или коэффициентов) на дискретном множестве возможных решений и параметрического синтеза после выбора структуры.

Литература

1. Lesnikov V., Naumovich T. Number-Theoretic and Algebraic Aspects of Structural Synthesis of Digital Filters. – GSPx-2004, (The Embedded Signal Processing Conference), Santa Clara, Ca, USA, September 27 - 30, 2004.
2. Lesnikov V., Naumovich T. Explanation of Effect of Low Sensitivity of Digital Filters with Some Structures. – GSPx-2004, (The Embedded Signal Processing Conference), Santa Clara, Ca, USA, September 27 - 30, 2004.
3. Лесников В. А., Наумович Т. В. Теоретико-числовые и алгебро-топологические аспекты структурного синтеза цифровых фильтров. – Сб. трудов X-ой международной научно-технической конференции “Радиолокация, навигация и связь”. Т. 1, Воронеж, 2004. – с. 209-217.

4. Лесников В. А., Наумович Т. В. Теоретико-числовые аспекты структурного синтеза цифровых фильтров. – Доклады 6-ой Международной конференции “Цифровая обработка сигналов и ее применение” – Москва-2004. Т. 1 – с. 36-38.

5. Лесников В. А. Топография дискретизированной **z**-плоскости при квантовании коэффициентов ЦФ. – Вятский гос. ун-т. – Киров, 2003. – 47 с. – Деп. ВИНИТИ № 1714-В2003, 22.09.2003 г.

6. Лесников В. А. Дискретизация z-плоскости вследствие квантования коэффициентов цифровых фильтров высоких порядков. – Сборник трудов IX-ой международной научно-технической конференции “Радиолокация, навигация, связь”, Воронеж, 2003 г., т. 1, с. 321 - 329

7. Лесников В. А. Природа эффекта низкой чувствительности характеристик цифрового фильтра к точности представления коэффициентов. Доклады 5-ой Международной конференции ”Цифровая обработка сигналов и ее применение” – Москва-2003. Т. 1 – с. 68-71.

8. Лесников В. А. Нумерация и декомпозиция структур цифровых фильтров – Доклады 3-ей Межд. конф.“Цифровая обработка сигналов и ее применение” – Москва, 2001. Т. 1 – с. 140-144.

9. Лесников В. А., Наумович Т. В. Генерация структур цифровых фильтров. - Доклады 3-ей Межд. конф. “Цифровая обработка сигналов и ее применение” – Москва-2001. Т. 1 – с. 135-139.

10. Лесников В. А. Дискретизация **z**-плоскости вследствие квантования коэффициентов рекурсивных цифровых фильтров. - Доклады 3-ей Международной конференции “Цифровая обработка сигналов и ее применение” – Москва-2001. Т. 1 – с. 130 - 135.

11. Лесников В. А., Наумович Т. В. Генерация и нумерация структур при структурном синтезе рекурсивных цифровых фильтров. – Сб. трудов 6-й международной научно-технической конференции “Радиолокация, навигация, связь” – Воронеж, 2000. – т. 3. – с. 1858 – 1868.

12. Лесников В. А., Наумович Т. В. Дискретизация z-плоскости при квантовании коэффициентов рекурсивных цифровых фильтров высоких порядков. - Вестник Вятского НЦ Верхне-Волжского отделения Академии технологических наук РФ. - Киров, 2000. - с.38 - 41.

13. Лесников В. А., Наумович Т. В., Частиков А. В. Автоматическая генерация структур цифровых фильтров. - Известия вузов. Электромеханика, 1999, № 2, с. 73 – 74.