АЛГОРИТМ СИНТЕЗА ВЕЙВЛЕТ-БАЗИСОВ ЗАДАННОЙ ДЛИТЕЛЬНОСТИ НА ОСНОВЕ ИНТЕРПОЛИРУЮЩИХ ФУНКЦИЙ

Кириллов С.Н., Бахурин С.А.

Рязанская государственная радиотехническая академия
Тел. (0912) 36-82-44, e-mail: snk@rinfotels.ru, bahurin@mail.ru

На сегодняшний день, наиболее широкое распространение получили стандарты сжатия изображений JPEG2000 и видеоинформации MPEG4 [1] построенные на основе вейвлет-разложения. Несмотря на то, что известно достаточно большое количество различных классов вейвлет-базисов, представленных в работах С. Маллата, И. Мейера [2], И. Добеши [3], В.Ф. Кравченко [4], тем не менее, они получены эмпирически, и общего универсального метода построения вейвлет-функций с заданными свойствами не существует [2].

Целью работы является разработка алгоритма построения вейвлет-базисов заданной длительностью на основе интерполирующих функций.

Теория вейвлет-разложения строится на понятии кратномасштабного анализа функционального пространства, представляющего собой последовательность вложенных друг в друга замкнутых подпространств [1,2] пространства $L^2(R)$, таких что существует масштабирующая (скейлинг) функция $\varphi(t)\in V^0$, чьи сдвиги образуют ортонормированный базис пространства V^0, удовлетворяющая масштабирующему уравнению вида [1,2]:

$$\varphi(t)=\sqrt{2}\sum_{n\in Z} h_n\cdot\varphi(2t-n), \qquad (1)$$

где h_n, $n\in Z$ – некоторый набор коэффициентов. В частотной области, масштабирующее уравнение (1) можно представить как

$$\tilde{\varphi}(\omega)=\tilde{m}_0(\omega/2)\cdot\tilde{\varphi}(\omega/2), \qquad (2)$$

где $\tilde{\varphi}(\omega)=F[\varphi(t)]$ – преобразование Фурье скейлинг-функции $\varphi(t)$,

$$\tilde{m}_0(\omega)=\left(1/\sqrt{2}\right)\sum_{n\in Z} h_n\cdot\exp(-jn\omega). \qquad (3)$$

Как было показано в [2], для того чтобы скейлинг-функция $\varphi(t)$ образовывала бы ортонормированный базис вложенного пространства V^0, необходимо почти всюду выполнение равенств:

$$\sum_{n\in Z}\left|\tilde{\varphi}(\omega+2\pi n)\right|^2=1/2\pi,$$
$$\left|\tilde{m}_0(\omega)\right|^2+\left|\tilde{m}_0(\omega+\pi)\right|^2=1. \qquad (4)$$

Пространства функций W^n, $n\in Z$ можно определить как ортогональные дополнения пространств V^n до пространств V^{n+1}. Тогда функции $\psi(t)\in W^0$, чьи целочисленные сдвиги образуют ортонормированный базис пространства W^0 и удовлетворяют масштабирующему уравнению вида [2]:

$$\tilde{\psi}(\omega)=\exp(j\,\omega/2)\cdot\tilde{m}_0(\omega/2+\pi)\cdot\tilde{\varphi}(\omega/2), \qquad (5)$$

или во временной области

$$\psi(t)=\sqrt{2}\sum_{n\in Z} g_n\cdot\varphi(2t-n), \qquad (6)$$

где $$g_n=(-1)^{1-n}h_{1-n},\quad n\in Z, \qquad (7)$$

называют вейвлет-функциями.

При использовании вейвлет-разложения для дискретных или цифровых сигналов, используют только коэффициенты масштабирующих уравнений (1) и (6): h_n и g_n, а сами скейлинг и вейвлет-функции не вычисляются [1,2]. При этом количество отличных от нуля коэффициентов h_n и g_n определяют длительность вейвлет-базиса. Таким образом, для синтеза вейвлет-базиса заданной длительности, достаточно получить заданное количество коэффициентов h_n масштабирующего уравнения (1) и скейлинг функцию $\varphi(t)$, удовлетворяющие (4).

Поскольку целочисленные сдвиги скейлинг функции $\varphi(t)$ образуют ортонормированный базис пространства V^0, то автокорреляционная функция $R_\varphi(t)$ удовлетворяет условию интерполяции:

$$R_{\varphi}(n)=\delta_n=\begin{cases}1, & n=0;\\ 0, & n\neq 0,\end{cases}\quad n\in Z. \qquad (8)$$

Таким образом любая интерполирующая функция $x(t)$ может служить прототипом скейлинг функции, а значит и кратномасштабного анализа, для построения которого необходимо по имеющейся автокорреляционной функции $R_{\varphi}(t)=x(t)$ восстановить скейлинг функцию $\varphi(t)$ и вычислить коэффициенты h_n масштабирующего уравнения (3). На практике, необходимо иметь точные значения коэффициентов h_n и g_n, а сами базисные функции можно получить через их бесконечную свертку с их же сжатиями и растяжениями, что следует непосредственно из масштабирующих уравнений (1) и (6).

Рассмотрим продискретизированную с интервалом $\Delta t=0.5$ интерполирующую функцию

$$x_{\partial}(t)=\sum_{n\in Z}x(t)\cdot\delta(t-n\cdot\Delta t), \qquad (9)$$

где $\delta(t)$ – дельта функция. Возьмем преобразование Фурье выражения (9), учтем условие интерполяции (8), тогда

$$x(2n\cdot\Delta t)=\delta_n,\quad n\in Z, \qquad (10)$$

и выражение (9) в частотной области можно представить как:

$$\tilde{x}_{\partial}(\omega)=1+\sum_{n\in Z}x((2n+1)\cdot\Delta t)\cdot\exp(-j\cdot\omega\cdot(2n+1)\cdot\Delta t). \qquad (11)$$

Из выражения (11) следует, что

$$\tilde{x}_{\partial}(\omega)+\tilde{x}_{\partial}(\omega+2\pi)=2. \qquad (12)$$

Сравнивая выражение (12) с условиями (4) получим:

$$\tilde{m}_0(\omega)=\sqrt{\tilde{x}_{\partial}(2\omega)/2}. \qquad (13)$$

Таким образом, коэффициенты масштабирующего уравнения можно рассчитать через обратное преобразование Фурье:

$$h_n^0=\int_{-\pi}^{\pi}\tilde{m}_0(\omega)e^{j\omega n\Delta t}d\omega,\quad n\in Z, \qquad (14)$$

где h_n^0 – коэффициенты учитывающие сдвиги с шагом 0.5, из которых необходимо выделить только коэффициенты целочисленных сдвигов:

$$h_n=h_{2n}^0,\quad n\in Z. \qquad (15)$$

Таким образом, синтез коэффициентов масштабирующего уравнения сводится к вычислению спектра дискретной интерполирующей функции, возведению спектра в степень 0.5, взятию обратного преобразования Фурье с последующим выбором коэффициентов целочисленных сдвигов.

В качестве исходной можно использовать интерполирующую функцию вида

$$x(t)=\mathrm{sinc}(\pi\cdot t)\cdot G(t), \qquad (16)$$

полученную в результате решения задачи идеальной интерполяции по критерию минимума среднего квадрата ошибки при ограничении на финитность реализации восстанавливаемого сигнала [5]. Здесь $G(t)$ – весовой множитель, дробно-рациональная функция учитывающая накладываемые ограничения, в простейшем случае может быть представлена как

$$G(t)=1/(1+\alpha\cdot t^2), \qquad (17)$$

где α – постоянный параметр. Использование интерполирующих функций (16) обеспечивает уменьшение ошибки восстановления финитных во времени сигналов, по сравнению с функциями вида $x(t)=\mathrm{sinc}(\pi\cdot t)$, за счет меньшего уровня и более высокой скорости спада боковых лепестков [5]. Таким образом, изменяя величину параметра α можно регулировать временную локализацию интерполирующей функции (16), тем самым количество отличных от нуля коэффициентов масштабирующих уравнений h_n и g_n.

Для экспериментальных исследований в качестве исходного сигнала использовалась модель случайного процесса вида

$$s(t)=\sum_{k=1}^{10}A_k\cdot\cos(2\cdot\pi\cdot f_k\cdot t+\theta_k), \qquad (18)$$

где A_k – амплитуды гармонических составляющих равномерно распределенные в интервале $[0\quad 1]$; f_k – частоты составляющих процесса равномерно распределенные в интервале $[0\quad 0.5]$; θ_k – начальные фазы составляющих процесса, равномерно распределены в интервале $[0\quad 2\cdot\pi]$.

На рис.1а представлены зависимости среднеквадратической ошибки восстановления η сигнала от параметра α после декомпозиции при помощи вейвлет-разложения на основе интерполирующей функции прототипа (16), при различном количестве коэффициентов масштабирующих уравнений K. Зависимости строились при усреднении по ансамблю из 2000 реализаций исходного процесса. Очевидно, при $K \to \infty$, вейвлет Шеннона обеспечит безошибочное восстановление, однако при ограничении K проявляются существенные ошибки усечения, что на рис.1а соответствует $\alpha = 0$.

Анализ рис.1а показывает, что использование предложенного алгоритма позволяет путем соответствующего выбора интерполирующей функции прототипа синтезировать вейвлет-базис с заданной длительностью, уменьшить ошибки усечения в 3..10 раз и получить на основе известных вейвлет-функций с бесконечной длительностью, базисы с лучшими характеристиками при заданном количестве коэффициентов масштабирующих уравнений, а значит и меньшем порядке фильтров разложения-восстановления.

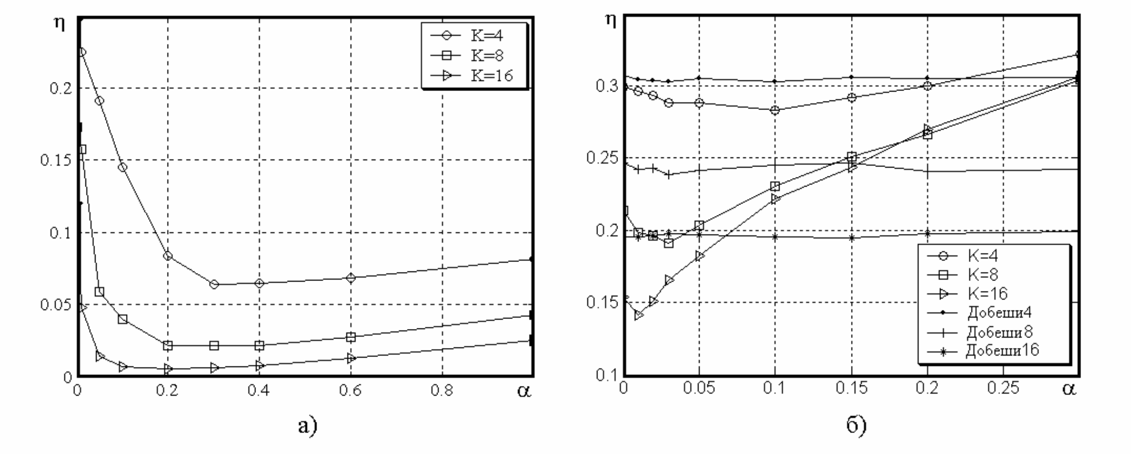

Рис.1

Если вейвлет-разложение используется в задачах сжатия, то при восстановлении не учитывается высокочастотная составляющая разложения. При этом ошибки неизбежны, но их величина также может быть уменьшена за счет выбора интерполирующей функции прототипа. На рис.1б представлена зависимость среднеквадратической ошибки восстановления η при отбрасывании высокочастотной составляющей разложения от параметра α для различного числа коэффициентов масштабирующих уравнений K. Также, в качестве примера показаны ошибки восстановления при использовании вейвлет-базиса Добеши такой же длительностью (Добеши 4, Добеши 8 и Добеши 16). Зависимости строились при усреднении по ансамблю из 2000 реализаций исходного процесса.

Из рис.1б следует, что при использовании вейвлет-функций Добеши, ошибка не зависит от параметра α, в то время как вейвлеты синтезированные на основе интерполирующих функций (16) обеспечивают уменьшение ошибок восстановления на 10..30%.

На рис.2а показан вид интерполирующей функции прототипа $x(t)$, а также скейлинг и вейвлет-функций $\varphi(t)$ и $\psi(t)$, полученных на основе $x(t)$ для случая $\alpha = 0.3$, и количества коэффициентов масштабирующих уравнений $K = 4$.

Как следует из рис.2а интерполирующая функция прототип обладает высокой скоростью спада боковых лепестков, при этом скейлинг и вейвлет-функции достаточно хорошо локализованы во времени. Частотная локализация интерполирующей функции прототипа $x(\omega)$, а также скейлинг и вейвлет-функций $\varphi(\omega)$ и $\psi(\omega)$ представлена на рис.2б для случая $\alpha = 0.3$, $K = 4$.

Таким образом, предложен алгоритм синтеза вейвлет-базисов заной длительностью на основе интерполирующей функции прототипа.

Использование вейвлет-функций, полученных на основе предложенного алгоритма позволяет снизить ошибки усечения при ограничении количества коэффициентов масштабирующих уравнений в 3..10 раз по сравнению с известной бесконечной вейвлет-функцией Шеннона.

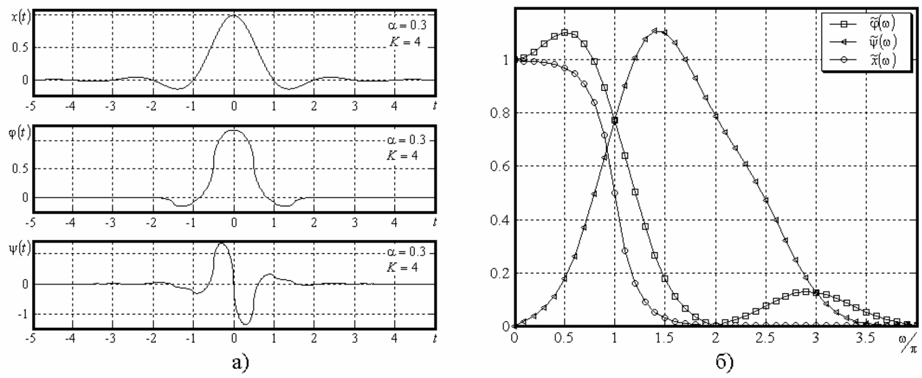

Рис.2

При восстановления сигнала при отбрасывании высокочастотных составляющих разложения, синтезированные на основе предложенного алгоритма вейвлет-функции обеспечивают выигрыш по сравнению с вейвлет-функциями Добеши порядка 10..30% при одинаковом порядке фильтров разложения-восстановления.

Библиографический список

1 Воробьев В.И., Грибунин В.Г. Теория и практика вевйлет-преобразования. – С-Пб.: Военный университет связи, 1999. – 204 с.

2 Петухов А.П. Введение в теорию базисов всплесков. – С-Пб.: Издательство СПбГТУ, 1999. – 132 с.

3 Чуи Ч. Введение в вейвлеты. – М.: Мир, 2001. – 412 с.

4 Кравченко В.Ф., Рвачев В.А. «Wavelet»-системы и их применение в обработке сигналов // Зарубежная радиоэлектроника: Успехи современной радиоэлектроники, 1996. №4. С. 3-20.

5 Кириллов С.Н., Зорин С.В., Бахурин С.А. Синтез оптимальных скейлинг и интерполирующих функций при ограничении на реализуемость устройств обработки // Труды Российского научно-технического общества радиотехники, электроники и связи имени А.С.Попова: Серия ЦОС и ее применение. Вып. 4. Т. 1. С. 30-32.