АНАЛИЗ ОШИБОК ОЦЕНОК ВЕСОВОГО ВЕКТОРА ΔW В ЦИФРОВОМ АВТОКОМПЕНСАТОРЕ ПОМЕХ (ЦАКП) ОТ ОБЪЕМА ВЫБОРОК

Григорьев Л.Н.
ОАО «Всероссийский научно-исследовательский институт радиотехники (ВНИИРТ)»

1. Применение цифрового автокомпенсатора помех с разомкнутой обратной связи встречает определенные ограничения при вычислении весового вектора *w*. Эти ограничения связаны с временным балансом, который диктуется объемом выборки [1].

Представляет практический интерес определить плотность вероятности и числовые характеристики ошибок весового вектора $\Delta w = \hat{w} - w_{опт}$ в зависимости от объема выборок *K*, при различных значениях мощности помех σ_n^2 и количества компенсационных антенн *N*. Функциональная схема ЦАКП с разомкнутой петлей обратной связи приведена на рис.1. Подробное описание принципов работы изложено в работе [4].

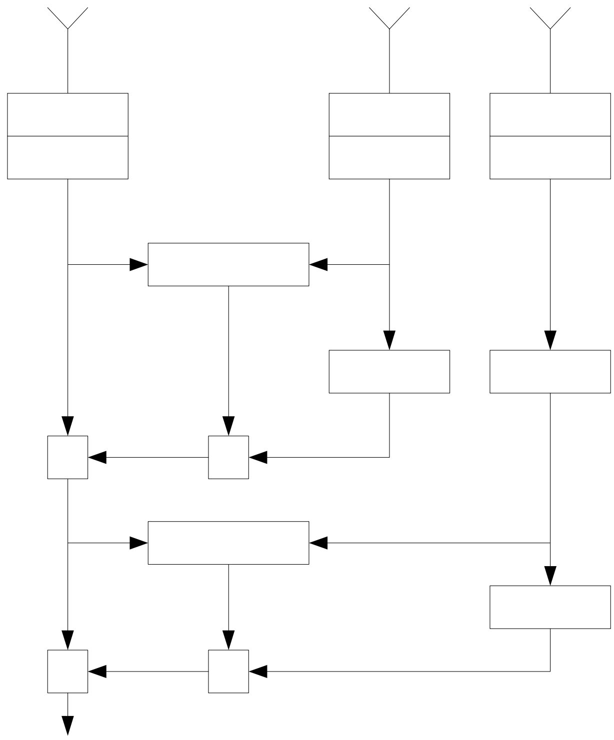

Рис.1. – Структурная схема ЦАКП с разомкнутой петлей обратной связи.

2. Плотность распределения *N* – мерного комплексного Гауссова распределения представлена в виде [2].

$$P(\xi) = \frac{1}{\pi^N}|\xi|^{-1}\exp\left(-\xi^H \sum \xi^{-1}\xi\right), \qquad \text{где } (\cdot)^H = (\cdot)^{*T}$$

Если совокупность значений $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_K$ является выборкой из *K* комплексных оценочных векторов из такого распределения, то тогда эрмитова ковариационная матрица выборок может быть представлена в виде:

$$\hat{\Sigma}_\xi = \frac{1}{K}\sum_{j=1}^{K}\dot{\xi}_j\dot{\xi}^*$$

и служит оценщиком правдоподобия для эрмитовой ковариационной матрицы Σ_ξ. Оценщик $\hat{\Sigma}_\xi$ является достаточной статистикой для эрмитовой ковариационной матрицы Σ_ξ. При этом комплексная положительно определенная матрица $\hat{A} = K\,\hat{\Sigma}_\xi$ распределена по закону Уишарта [2].

В работе [3] приложение А показано, что плотность распределения накопленной ковариационной матрицы $\hat{A} = K\,\hat{\Sigma}_\xi$ может быть представлена в виде произведения множителей

$$P(A)=P(X)P(Y)P\left(\frac{\Delta w}{Y}\right), \qquad \text{где } P(X)=\frac{|X|^{N-K-\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}\frac{X}{\sigma_{\min}^2}}}{\left|\sigma_{\min}^2\right|^{N-K}\Gamma(K-N)},$$

(1)

$P(X)$ имеет вид распределения Уишарта с дисперсией $\sigma_{\min}^2$;

K – количество выборок;

N – количество компенсационных каналов;

$X=K[\hat{\sigma}_0^2-\hat{R}_{0K}^H\hat{R}_{KK}^{-1}R_{0K}]$;

$\sigma_{\min}^2=\left(\sigma_0^2-R_{0K}^H R_{KK}^{-1}\right)$;

$\Gamma(K)=(K-N)!$

$\sigma_0^2=E\{U_0^2\}$ - мощность помехи по боковым лепесткам основной антенны;

$R_{0K}=E\{U_0U_K^*\}$ - значение взаимной корреляции между сигналами принятыми основной и компенсационной антеннами;

$R_{KK}=E\{U_KU_K^*\}$ - значение корреляции между сигналами принятыми компенсационными каналами;

$$P(Y)=\frac{|Y|^{N-K}e^{-\frac{1}{2}tr\left(\frac{Y}{R_{KK}}\right)}}{|R_{KK}|^{\frac{N}{2}}\Gamma(K)\Gamma(K-1)\ldots\Gamma(K-N)!} \tag{2}$$

$P(Y)$ имеет вид распределения Уишарта с дисперсией R_{KK}; $Y=K\hat{R}_{KK}$

$$P\left(\frac{\Delta w}{Y}\right)=\frac{e^{-\frac{1}{2}tr\left(\Delta w^T\Delta w R_{KK}^{-1}\right)}}{(2\pi)^{N-1}|R_{KK}|^{\frac{N-1}{2}}|Y|^{-\frac{1}{2}}} \tag{3}$$

$P\left(\frac{\Delta w}{Y}\right)$ имеет вид квадратичной функции от вектора Δw с ковариационной матрицей, который зависит от Y и является признаком Гауссова распределения, где $\Delta w=\hat{w}-w_{onm}$

$|\cdot|$ и tr соответственно операции взятия детерминанта и следа матрицы

Используя выражения (2) и (3) можно определить плотность вероятности распределения ошибок и числовые характеристики весового вектора $P(\Delta w)$ как:

$$P(\Delta w)=\int_0^\infty P(\Delta w,Y)P(Y)dY=\int_0^\infty\frac{e^{\frac{1}{2}tr\left(\Delta w^T(R_{KK})^{-1}\Delta w\right)}}{(2\pi)^{N-1}|R_{KK}|^{\frac{N-1}{2}}|Y|^{-\frac{1}{2}}}\cdot\frac{e^{-\frac{1}{2}tr\left(YR_{KK}^{-1}\right)}|Y|^{\frac{N-K}{2}}}{|R_{KK}|^{\frac{N}{2}}\Gamma(K)\Gamma(K-1)\ldots\Gamma(K-N)}dY==\frac{(K-N-2)|R_{KK}|^{\frac{1}{2}}}{2\pi\left(1+\Delta w^TR_{KK}\Delta w\right)^{\frac{K-N+4}{2}}} \tag{4}$$

$$\Delta w^T\cdot\Delta w=|\Delta w|^2$$

Из выражения (4) видно, что $P(\Delta w)$ зависит от мощности помех R_{KK}. Имея выражения плотности вероятности распределения ошибок (4) можно получить числовые характеристики.

Математическое ожидание (среднее значение):

$$m_1=E\{\Delta w\}=\frac{1}{K}\int_0^\infty\Delta wP(\Delta w)d(\Delta w)=\frac{(K-N+2)|R_{KK}|^{\frac{1}{2}}}{2\pi}\frac{1}{K}\int_0^\infty\frac{\Delta wd(\Delta w)}{\left(1+(\Delta w)^2R_{KK}\right)^{\frac{K-N+2}{2}}} \tag{5}$$

начальный момент:

$$m_2=E\left\{(\Delta w)^2\right\}=\frac{1}{K}\int_0^\infty(\Delta w)^2P(\Delta w)d(\Delta w)=\frac{(K-N+2)|R_{KK}|^{\frac{1}{2}}}{2\pi}\frac{1}{K}\int_0^\infty\frac{(\Delta w)^2d(\Delta w)}{\left(1+(\Delta w)^2R_{KK}\right)^{\frac{K-N+2}{2}}} \tag{6}$$

дисперсия:

$$M_2\{\Delta w\}=m_2(\Delta w-m_1\{\Delta w\}) \tag{7}$$

С учетом (5) и (6), выражение (7) позволяет проанализировать, как изменяется значение дисперсии ошибок весового вектора Δw от объема выборок K и мощности помех R_{KK}.

На рис.2 приведены результаты вычислений значения дисперсии ошибок весового вектора M_2 при двух значениях мощности помех R_{KK} и количества компенсационных каналов N (N=2, N=4).

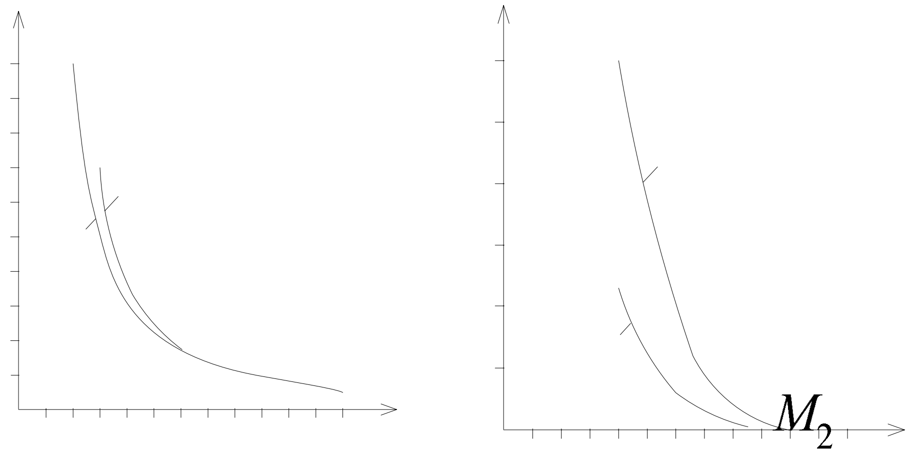

Рис. 2. – зависимость дисперсии ошибок весового вектора Δw от объема выборок.

Из графика видно, что при малых значениях помех R_{KK}=1 для случая двух и четырех компенсационных каналов, значения дисперсии ошибок весового вектора Δw перестает практически зависеть от количества выборок больше 14.

При значениях мощности помех R_{KK}=100, имеющие практическое значение, для случая двух и четырех компенсационных каналов, значение дисперсии ошибок весового вектора практически зависит от объема выбора при K больше 10. Дисперсия ошибок весового вектора при этом возрастает с увеличением количества компенсационных каналов.

Литература

1. Р.А. Монзинго, Т.У. Миллер. Адаптивные антенные решетки. Введение в теорию. М., «Радио и связь», 1986.

2. N.R. Goodman. Statistical analysis based on a certain multivariate Gaussian distribution. Ann. Math. Stat., vol. 34 March 1963, pp. 152-177.

3. A.B. Baggeroer. Confidence intervals for regression (MEM) spectral estimates. IEEE Trans. Inf. Theory, vol. IT-22, No 5, September 1976, pp. 534-545.

4. Л.Н.Григорьев, С.Д.Алексеев. Оценка дисперсии помех на выходе цифрового автокомпенсатора помех (ЦАКП) от объема выборок. 4-я международная конференция Цифровая обработка сигналов и ее применение. М. Россия, 2002. Т2.