УТОЧНЕНИЕ МОДЕЛЕЙ ДИСКРЕТНО АНАЛОГОВЫХ СИСТЕМ ОБРАБОТКИ ДВУМЕРНЫХ СИГНАЛОВ

Миронов В.Г.
Московский энергетический институт (ТУ)
Кафедра электрофизики

Полупроводниковые интегральные схемы на базе цепей с переключаемыми конденсаторами (ЦПК) успешно конкурируют в ряде случаев с цифровыми системами обработки многомерных сигналов [1,2]. При проектировании систем на ЦПК включается этап моделирования временных и частотных характеристик. Моделирование выполняется относительно просто, если ЦПК считать идеальными. Однако реальные системы на базе ЦПК таковыми не являются, поскольку содержат не идеальные емкости, ключи и операционные усилители (ОУ). Поэтому для повышения точности моделирования нужно учитывать паразитные резистивные двухполюсники и частотные зависимости коэффициентов усиления ОУ. Ниже излагается методика такого учета.

Для пассивного резистивного двухполюсника с проводимостью $\boldsymbol{g}$ справедливо уравнение во временной области

$$\frac{dQ_R(t)}{dt} = \dot{Q}_R = gU_R(t), \tag{1}$$

где Q_R и U_R, - заряд и напряжения такого двухполюсника. Уравнение (1) алгебраизуется с помощью формул неявного интегрирования, в результате чего получаем формулы

$$Q_{R(l+1)} = -\widetilde{Q}_{R(l)} + C_R U_R(l+1), \tag{2}$$

$$-\widetilde{Q}_{R(l)} = \sum_{i=0}^{m} a_i Q_{R(l-i)} + hg\sum_{i=0}^{m} b_i U_R(l-i), \tag{3}$$

$$C_R = hgb_{-1}; \tag{4}$$

В (3) и (4) индексы $l+1, l, \ldots$ соответствуют моментам времени $(l+1)h, lh, \ldots,$ a_i, b_i, b_{-1}- коэффициенты конкретной формулы численного интегрирования, h - шаг интегрирования.

Обычно все уравнения ЦПК записываются для приращений заряда от момента $t_{\alpha-1}^{-}$ до момента $t \in (\mathrm{t}_{\alpha\text{-}1}, \mathrm{t}_{\alpha}]$. Если обозначить $q_{R(l+1)} = Q_{R(l+1)} - Q_{R(l)}$, то на основании (2) находим

$$q_{R(l+1)} = -\widetilde{q}_{R(l)} + C_R U_{R(l+1)} - C_R U_{R(l)} \tag{5}$$

где

$$\widetilde{q}_{R(l)} = \widetilde{Q}_{R(l)} - \widetilde{Q}_{R(l-1)}.$$

Уравнению (5) соответствует дискретная емкостная модель резистивного двухполюсника, содержащего емкость C_R с начальным напряжением $U_R(l)$ и параллельный источник заряда $\widetilde{q}_{R(l)}$, ориентированный соответствующим образом. Источник заряда может быть преобразован в источник напряжения, что дает вторую дискретную модель. Значения зарядов резистивных двухполюсников в начальный момент времени $Q_{R(0)} = 0$.

Еще одна возможность учета резистивных двухполюсников основана на применении R,C-мутаторов. Как известно [3], R,C- мутатор являются четырехполюсником, описываемым уравнениями (в операторной форме)

$$U_1 = U_2, \qquad I_2 = -pI_1 \tag{6}$$

$$U_1 = I_2/p, \quad I_1 = -\mathrm{U}_2. \tag{7}$$

Аналогичные уравнения можно записать, заменяя токи на заряды.

Применяя формулы неявного интегрирования, можно получить соотношения, описывающие дискретные модели мутатора. Например, при использовании неявного метода Эйлера получаем уравнение

$$\begin{bmatrix} q_{1,k+1} \\ U_{2,k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -h \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{1,k+1} \\ q_{2,k+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q_{1k} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{8}$$

Уравнению (7) соответствует другое соотношение

$$\begin{bmatrix} q_{1,k+1} \\ U_{1,k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -h \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{2,k+1} \\ U_{2,k+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q_{1k} + hU_{2k} \\ U_{1k} \end{bmatrix} \qquad (9)$$

Соотношения (5), (8), (9) легко учесть при составлении уравнений ЦПК, так как используемые переменные те же, что и для основных элементов ЦПК (напряжения и приращения зарядов).

Важной задачей при моделировании ЦПК является учет зависимости от частоты коэффициента усиления ОУ. В простейшем случае этот коэффициент

$$K(p) = K_0\omega_0 / (p + \omega_0), \qquad (10)$$

где ω_0 - граничная частота. Формуле (10) соответствует дифференциальное уравнение ОУ

$$U_3(t) - K_0\omega_0[U_1(t) - U_2(t)] - \omega_0 U_3(t), \qquad (11)$$

где U_1, U_2 - входные, а U_3 - выходное напряжение. Применяя формулы неявного интегрирования, получим дискретные модели ОУ. Например для неявного метода Эйлера имеем

$$K_{ОУ} = hK_0\omega_0(1 + h\omega_0), \; -E_{ОУ(l)} = \frac{U_3(l)}{1 + h\omega_0} \qquad (12)$$

где $K_{ОУ}$ и $E_{ОУ(l)}$ - параметры дискретной модели- коэффициент усиления и вспомогательная ЭДС.

В некоторых случаях коэффициент усиления ОУ аппроксимируется не функцией с одним полюсом $-\omega_0$, дробно рациональной функцией с несколькими полюсами и нулями:

$$K(p) = \frac{a_m p^m + \ldots + a_1 p + a_0}{p^n + \ldots + b_1 p + b_0}, \qquad (13)$$

где a_i, b_i - вещественные коэффициенты и $m < n$. Запишем для ОУ уравнения состояния

$$\dot{x} = A_1 x + B_1(U_1 - U_2), \qquad U_3 = A_2 x, \qquad (14)$$

где x - вектор переменных состояния, A_1 , B_1, A_2 - матричные коэффициенты. Эти коэффициенты определим так, чтобы пара матриц $[A_1, A_2^T]$ была полностью управляемой [4]. Тогда получим

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 - b_0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 - b_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 - b_{n-1} \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \ldots \\ a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad A_2^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (15)$$

где T - индекс транспозиции.

При таких матричных коэффициентах выходная переменная $y = A_2 x$ содержит один элемент, равный n -й переменный состояния т.е. $y = U_3 = x_n$.

Алгебраизация (14) непосредственно приведет к дискретной модели ОУ. Например, с помощью метода Эйлера получаем

$$x_{l+1} = (1 - A_1 h)^{-1} x_l + (1 - hA_1)^{-1} B_1 \left(U_{1(l+1)} - U_{2(l+1)}\right) \qquad (16)$$

$$U_{3(l+1)} = -E_{ОУ(l)} + K_{ОУ}\left(U_{1(l+1)} - U_{2(l+1)}\right) \qquad (17)$$

где $-E_{ОУ(l)} = A_2(1 - hA_1)^{-1} x_l$, $K_{ОУ} = A_2(1 - hA_1)^{-1} B_1$ (18)

Применение рассматриваемых моделей существенно повышает точность анализа временных и частотных характеристик ЦПК при обработке сигналов.

Литература

1. Миронов В. Г. Цифроаналоговые интерфейсы и системы обработки одномерных и многомерных сигналов. М.: DSPA-5, Proc.1, 2003, 167-168.
2. Миронов В. Г. Проблемы собственных значений матриц в задачах проектирования и применения систем обработки одномерных и многомерных сигналов. М.: DSPA-5, Proc.1, 2003, 149-151.

3. Ионкин П. А., Миронов В. Г. Синтез R-C- схем с активными независимыми элементами. –М. Энергия, 1976. – 240с.

4. Ионкин П. А. Максимович Н. Г., Миронов В. Г. и др. Синтез линейных электрических и электронных схем. –Львов, Вища школа, 1982. – 312с.