СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ДЕКОРРЕЛИРУЮЩИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Лобанов С.В.
Московский авиационный институт (государственный технический университет)
125871, Москва, Волоколамское шоссе, 4, каф. 402 РСУПИ

В настоящее время практически во всех реально используемых алгоритмах сжатия изображений и многих других алгоритмах цифровой обработки сигналов используется линейные ортогональные преобразования. Линейные ортогональные преобразования предназначены, прежде всего, для декорреляции блока случайных процессов, т. е. для обеспечения попарной статистической независимости нескольких случайных величин. Коэффициенты корреляции между элементами блока после преобразования будут равны нулю, если преобразование является собственными векторами ковариационной матрицы входных случайных процессов.

Как известно [1], критерием абсолютной статистической независимости двух случайных величин ***X*** и ***Y*** считается равенство нулю генерального корреляционного отношения, как показателя наличия функциональной зависимости:

$$\rho_{Y/X} = \sqrt{D_Y\left[M(Y/X)\right]/DY} = \sqrt{M\left[M_Y(Y/X) - MY\right]^2 / M(Y - MY)^2}\ , \quad (1)$$

Однако линейные ортогональные преобразования предназначены для блочной обработки сигналов в предположении, что между элементами обрабатываемого блока данных имеется линейная функция регрессии. Если между элементами исходного блока имеется нелинейная функция регрессии, то в этом случае корреляционное отношение уже не будет равно коэффициенту корреляции и в этом случае, чтобы обнулить корреляционное отношение (1), необходимо применять более сложные нелинейные преобразования.

У реальных сигналов, с которыми приходится иметь дело на практике, функции регрессии между элементами блока далеко не линейны. Поэтому для обеспечения максимальной эффективности алгоритмов обработки сигналов необходимо рассматривать модели сигналов с нелинейной функцией регрессии более высокого порядка, нежели чем первый. Таким образом, возникает необходимость в нелинейном преобразовании, которое было бы оптимально для обработки сигналов с нелинейной функцией регрессии между элементами блока данных.

Рассмотрим для простоты функцию регрессии второго порядка и две переменных ***X*** и ***Y***. Тогда условная взаимная функция регрессии для этих двух переменных будет следующей:

$$M_Y(Y/X = x) = a + b\,x + c\,x^2 \quad (2)$$

Для обеспечения статистической независимости двух величин, как следует из (1), необходимо обеспечить равенство нулю дисперсии $D_Y[M(Y/X=x)]$ разброса условного математического ожидания $M_Y(Y/X=x)$ относительно MY. В общем случае при изменении x дисперсия $D_Y[M(Y/X=x)]$ также изменяется. В случае наличия функций регрессии (2) условная дисперсия примет следующий вид:

$$D_Y(a,b,c) = D_Y\left[M(Y/X = x)\right] = M\left[M_Y(Y/X = x) - MY\right]^2 = M\left[a + b\,x + c\,x^2 - MY\right]^2 \quad (3)$$

Эта величина при фиксированных значениях параметров a, b и c является постоянной. Принимая во внимание свойство минимальности дисперсии, значения параметров a, b и c находят из условия $D_Y(a,b,c)\to min$. Для этого возведя в квадрат выражение, далее применив к нему операцию математического ожидания, учитывая свойства математического ожидания, а затем, продифференцировав полученное выражение по a, b и c, получим систему линейных уравнений:

$$\frac{\partial}{\partial a} D_Y(a,b,c) = M\left[\frac{\partial}{\partial a}\left(a + bX + cX^2 - MY\right)^2\right] = 2\left[a + bMX + cM\left(X^2\right) - MY\right] = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial b} D_Y(a,b,c) = M\left[\frac{\partial}{\partial b}\left(a + bX + cX^2 - MY\right)^2\right] = 2\left[aMX + bM\left(X^2\right) + cM\left(X^3\right) - MX\ MY\right] = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial c} D_Y(a,b,c) = M\left[\frac{\partial}{\partial c}\left(a + bX + cX^2 - MY\right)^2\right] = 2\left[aM\left(X^2\right) + bM\left(X^3\right) + cM\left(X^4\right) - M\left(X^2\right)MY\right] = 0$$

Решив данную систему относительно a, b и c, получаем окончательный результат:

$$\begin{aligned} a &= \Big(M\left(X^4\right)\left(M(X)M(XY) - M\left(X^2\right)M(Y)\right) + \\ &\quad M\left(X^3\right)\left(M\left(X^3\right)M(Y) - M(X)M\left(X^2Y\right)\right) + M\left(X^2\right)\left(M\left(X^2\right)M\left(X^2Y\right) - M\left(X^3\right)M(XY)\right)\Big)/Q; \\ b &= \left(-M\left(X^4\right)K(XY) + M\left(X^3\right)K\left(X^2Y\right) - M\left(X^2\right)\left(M\left(X^2Y\right)M(X) - M\left(X^2\right)M(XY)\right)\right)/Q; \\ c &= \left(M\left(X^3\right)K(XY) - M\left(X^2\right)K\left(X^2Y\right) + M(X)\left(M\left(X^2Y\right)M(X) - M\left(X^2\right)M(XY)\right)\right)/Q; \end{aligned} \quad (4)$$

где $Q = M\left(X^4\right)\left(M(X)^2 - M\left(X^2\right)\right) + M\left(X^3\right)^2 + M\left(X^2\right)^3 - 2M(X)M\left(X^2\right)M\left(X^3\right)$ – некоторое выражение, не зависящее от Y.

С другой стороны, если рассматривать независимость величины X от Y и проведя аналогичные рассуждения, то, как можно убедиться, условиями, при которых в обоих вариантах коэффициенты b и c станут равны нулю, а коэффициент a равен MY, будут следующими:

$$\begin{cases} K(XY)=0 & \Rightarrow \quad M(XY)=M(X)M(Y) \\ K(X^2Y)=0 & \Rightarrow \quad M(X^2Y)=M(X^2)M(Y) \\ K(XY^2)=0 & \Rightarrow \quad M(XY^2)=M(X)M(Y^2) \end{cases} \qquad (5)$$

Таким образом, для того чтобы сделать полностью независимыми друг от друга случайные величины X и Y в предположении, что функция регрессии у них квадратичная (2), необходимо обеспечить выполнение этих трех условий (5).

Проведя аналогичные рассуждения можно доказать, что в случае функции регрессии порядка P для декоррелирования блока элементов необходимо найти такое нелинейное преобразование, которое бы обнуляло все ковариационные моменты вида $K(XY^{\,i})$ и $K(YX^{\,i})$, где $1 \le i \le P$. Это означает, что при рассмотрении функции регрессии порядка P и количества переменных равного N имеется P ковариационных матриц (матрица i-го порядка приведена в таблице 1), в которых, используя какое-либо преобразование, необходимо обнулить все элементы, стоящие вне их главных диагоналей.

Таблица 1. Ковариационная матрица порядка i

$K(S_0S_0^i)$	$K(S_0S_1^i)$	$K(S_0S_2^i)$	$\cdots$	$K(S_0S_{N-1}^i)$
$K(S_1S_0^i)$	$K(S_1S_1^i)$	$K(S_1S_2^i)$	$\cdots$	$K(S_1S_{N-1}^i)$
$K(S_2S_0^i)$	$K(S_2S_1^i)$	$K(S_2S_2^i)$	$\cdots$	$K(S_2S_{N-1}^i)$
…	…	…	…	…
$K(S_{N-1}S_0^i)$	$K(S_{N-1}S_1^i)$	$K(S_{N-1}S_2^i)$	$\cdots$	$K(S_{N-1}S_{N-1}^i)$

Следует отметить, что, используя линейные преобразования с определенными коэффициентами, можно осуществить декорреляцию каждой отдельной ковариационной матрицы заданного порядка. Однако при этом возникает необходимость в нелинейном преобразовании для совмещения выходов P линейных преобразований в один выходной сигнал, чтобы при этом не нарушилось равенство нулю ковариационных моментов, стоящих вне главных диагоналей матриц.

В качестве такого нелинейного преобразования можно использовать многослойные нейронные сети, в основе которых лежит известная теорема Колмогорова [3,4] о представлении произвольной непрерывной функции N переменных с помощью операций сложения, умножения и суперпозиции из непрерывных функций одного переменного. Данная теорема утверждает, что каждая непрерывная функция N переменных, заданная на единичном кубе N-мерного пространства, представима в виде

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_N) = \sum_{q=1}^{2N+1} h_q\left[\sum_{p=1}^{N} \varphi_{q,p}(x_p)\right], \qquad (6)$$

где функции $h_q[u]$ непрерывны, а функции $\varphi_{q,p}(x_p)$, кроме того, еще и стандартны, т. е. не зависят от выбора реализуемой функции f. Так как на функции $\varphi_{q,p}(x_p)$ не налагаются какие-либо особые условия, то целесообразно их выбрать линейными:

$$\varphi_{q,p}(x_p) = T_{q,p}x_p\,, \qquad (7)$$

где $T_{q,p}$ – элемент некоторой матрицы преобразования $\boldsymbol{T}$. Необходимо отметить, что в случае блочного декоррелирующего преобразования, очевидно, должно быть N разных выходных функций от N одинаковых входных переменных.

В случае функции регрессии порядка P предлагается по аналогии с (6) и с учетом (7) использовать нелинейное преобразование следующего вида:

$$s_\omega(x_1, x_2, \ldots, x_N) = \sum_{q=1}^{P}\sum_{k=1}^{N} h_{\omega,q,k}\left[\sum_{p=1}^{N} T_{q,k,p}x_p\right], \qquad (8)$$

где s_ω – выходная спектральная компонента нелинейного преобразования с индексом ω (ω=1…N); $T_{q,k,p}$ – элемент матрицы декорреляции, которая осуществляет декорреляцию ковариационной матрицы порядка q, с индексами k и p; $h_{\omega,q,k}[u]$ – нелинейная функция для выходной спектральной компоненты с номером ω, матрицы декорреляции порядка q и спектральной компоненты матрицы декорреляции с индексом k.

Каждая декоррелирующая матрица $\boldsymbol{T_q}$ может быть найдена из соответствующей ковариационной матрицы заданного порядка. Очевидно, что в общем случае они не будут ортогональными, за исключением матрицы первого порядка. На данный момент пока не найдена методика нахождения декоррелирующей матрицы из ковариационной матрицы произвольного порядка, кроме первого, для которого, как известно, декоррелирующая матрица должна быть составлена из собственных векторов ковариационной матрицы первого порядка (преобразование Карунена -Лоэва).

При реализации функций $h_{\omega,q,k}[u]$ необходимо исходить из простоты реализации преобразования. Поэтому желательно найти такую универсальную функцию $h[u]$, которая была бы одинакова для всех декоррелирующих матриц. Тогда прямое преобразование примет следующий вид:

$$s_\omega(x_1, x_2, \ldots, x_N) = \sum_{q=1}^{P}\sum_{k=1}^{N} H_{q,\omega,k} h\left[\sum_{p=1}^{N} T_{q,k,p} x_p\right], \qquad (9)$$

где $H_{q,\omega,k}$ – элемент матрицы связи с индексами ω и k, которая связывает нелинейный выход декорреляционной матрицы порядка q с результатом преобразования. Синтез обратного преобразования, очевидно, можно провести аналогичным образом. Отличительным моментом будет то, что в качестве нелинейной будет использоваться обратная по отношению к $h[u]$ функция.

При выборе нелинейной функции $h[u]$ следует руководствоваться тем, что в качестве аргументов данной функции используется результат линейного преобразования (в частности ортогонального). При декорреляции линейным преобразованием блока данных элементы результата преобразования приобретают значительную неравномерность амплитуд, т. е. математические ожидания квадрата их амплитуд, усредненные по всей выборке, будут иметь сугубо нелинейный характер. При этом, упорядочив элементы блока преобразования по математическому ожиданию квадрата амплитуды, каждому из них можно сопоставить некоторый номер. Соответственно функция $h[u]$ должна преобразовывать амплитуду элемента выхода линейного преобразования в соответствующий данной амплитуде порядковый номер. Эта операция соответствует линеаризации математического ожидания квадрата амплитуд компонент линейного преобразования, т. е.

$$M_i = E\left\{S_i^2\right\} \quad \Rightarrow \quad h\left(M_i\right) = k\,i,$$

где $E\{\ldots\}$ – операция математического ожидания; k – некоторая константа.

Будем считать, что для обработки используется вектор $\boldsymbol{X}$, являющийся реализацией стационарного марковского процесса первого порядка, коэффициент корреляции между элементами блока у которого зависит от расстояния между ними и вычисляется по формуле

$$\rho\left(x_i, x_j\right) = \rho^{|i-j|}, \qquad (10)$$

что соответствует ковариационной матрице вида

$$\mathbf{K_X}(\rho) = \sigma_x^2 \begin{pmatrix} 1 & \rho & \ldots & \rho^{N-1} \\ \rho & 1 & \ldots & \rho^{N-2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \rho^{N-1} & \rho^{N-2} & \ldots & 1 \end{pmatrix},$$

где параметр ρ представляет собой коэффициент корреляции соседних отсчетов дискретного случайного процесса.

Можно показать [2], что значения дисперсий спектральных компонент S_ω являются диагональными элементами матрицы $\boldsymbol{K_Y}$=$\boldsymbol{W K_X W}^T$ и могут быть найдены по формуле:

$$\sigma_\omega^2 = \sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{N-1} w_{\omega,i} w_{\omega,j} \operatorname{cov}\left(x_i, x_j\right) = \sigma_x^2 \sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{N-1} w_{\omega,i} w_{\omega,j} \rho\left(x_i, x_j\right) = \sigma_x^2 \sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{N-1} w_{\omega,i} w_{\omega,j} \rho^{|i-j|} \qquad (11)$$

Так как, в соответствии с (9), все возможные варианты нелинейных функций в (8) получаются путем линейной комбинации только одной нелинейной функции, то функцию преобразования можно найти, если положить в (11) все $w_{\omega,i} = 1/\sqrt{N}$ (i=1…N). В большинстве случаев линейных ортогональных преобразований это соответствует нулевой спектральной компоненте. Тогда нормированное значение дисперсии нулевой спектральной компоненты в соответствии с (11) примет следующий вид

$$Sn_0 = \frac{\sigma_\omega^2}{\sigma_x^2} = 1 + \frac{2}{N}\sum_{i=0}^{N-2}\sum_{j=i+1}^{N-1} \rho^{j-i} = 1 + \frac{2\rho}{N(1-\rho)}\left(N - \frac{1-\rho^N}{1-\rho}\right) \qquad (12)$$

Так как это функция нормированной дисперсии спектральной компоненты, то данное выражение не зависит от изменения математического ожидания компоненты, т. к. $M\left(S_0\right) = M\left(X\right)\sqrt{N}$. Следовательно (12), это фактически график зависимости $M\left(S_0^2\right)$ от N и ρ. Таким образом, для нелинейной обработки результатов линейного преобразования каждой из матриц декорреляции можно использовать сигмоидную функцию, полученную из (12) путем нормирования относительно своего максимального значения:

$$h(u,\rho) = \begin{cases} \dfrac{u}{\sqrt{1-\rho+u^2}} \sqrt{1 - \dfrac{2\rho}{1-\rho^2}\dfrac{1-\rho^{u^2}}{u^2}}, & u \neq 0, \\ 0, & u = 0 \end{cases} \qquad (13)$$

где ρ – некоторый параметр, физически означающий коэффициент корреляции между соседними элементами. Более того, в качестве данного параметра необходимо использовать значение генерального корреляционного отношения (1) соседних элементов на входе преобразования. Особенностью данного выражения является то, что при ρ=0 данная зависимость вырождается в прямоугольный скачок, а при $\rho \to 1$ в линейную зависимость, что хорошо согласуется со статистическими свойствами нейронных сетей, как универсального средства обработки информации.

При использовании функции (13), кроме того, появляется возможность адаптивной обработки нестационарных процессов путем изменения для каждого обрабатываемого блока данных коэффициента корреляции ρ. Разбив нестационарный процесс на блоки определенного размера, в пределах каждого из которых сигнал квазистационарен, можно обрабатывать эти блоки независимо друг от друга с разным коэффициентом корреляции соседних элементов ρ, характерных для данного конкретного блока. В этом случае можно учитывать более тонкие нюансы локальных областей сигнала, примерно так, как это делается в вейвлет преобразовании, а не терять эти локальные особенности сигнала при обработке всей выборки входного сигнала с постоянным коэффициентом корреляции, рассчитанным для всего входного сигнала в целом.

Литература

1. Краснов М.Л., Киселев А.И. и др. Высшая математика: Учебник. Т. 5. – М.: Эдиториал УРСС, 2001. - 296 с.

2. Умняшкин С.В., Кочетков М.Е. Анализ эффективности использования дискретных ортогональных преобразований для цифрового кодирования коррелированных данных. // Известия вузов. Электроника. - №6. - 1998. - С. 79-84.

3. Колмогоров А.Н. О представлении непрерывных функций нескольких переменных в виде суперпозиции непрерывных функций одного переменного // Докл. АН СССР. 1957. Т. 114, № 5. С. 953-956.

4. Арнольд В.И. О представлении функций нескольких переменных в виде суперпозиции функций меньшего числа переменных // Мат. просвещение. 1958. Вып. 3. С. 41-61.

——————♦——————