МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ИЗОБРАЖЕНИЙ ДЛЯ АЛГОРИТМОВ ВЕЙВЛЕТ – ОБРАБОТКИ

Вакунов Н.В., Жизняков А.Л.

Муромский институт Владимирского государственного университета, г. Муром

Описание изображения на основе терминов того или иного теоретического подхода (т.е., фактически, создание его математической модели) является одним из важных этапов в разработке новых алгоритмов обработки изображений.

Любая из процедур обработки опирается на модель класса изображений – формализованное описание, выполненное с определенной степенью абстрагирования. Роль модели изображения в процессе извлечения информации состоит в обеспечении адекватного описания существенных свойств класса изображений, позволяющего дать конструктивную основу, для построения эффективных вычислительных процедур.

К настоящему времени разработано большое количество разнообразных моделей, которые используются при синтезе различных алгоритмов обработки. Наиболее часто применяют несколько основных подходов. Для разработки вейвлет – алгоритмов, эти подходы могут быть описаны в терминах вейвлет – преобразования.

В процедурах обработки с помощью локальных операторов, обычно применяются, так называемые, локальные модели случайного поля, характеризующие статистическую зависимость интенсивности изображения в точке *(m,n)*, от значений интенсивности в соседних точках, представляя *x(m,n)*, как линейную комбинацию значений $\{x(m+k,\ n+l),\ (k,l)\in S\}$ и аддитивного шума, где *S* – множество соседей, не включающее точку *(m,n)*[1].

$$x(m,n)=\sum_{(k,l)\in S} a_{k,l}\,x(m+k,n+l)+\xi(m,n) \qquad (1)$$

где $\xi(m,n)$ - двумерная последовательность независимых и одинаково распределенных значений шума с нулевым средним и дисперсией σ_{ξ}^{2}, $\boldsymbol{A}=\{a_{k,l};(k,l)\in S\}$ – вектор неизвестных коэффициентов модели.

Выражение (1) можно переписать как $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{n}$, где $\boldsymbol{x}$ – исходное изображение, $\boldsymbol{y}$ – поле предсказанных значений пикселов, $\boldsymbol{n}$ – поле случайного шума. После проведения вейвлет преобразования выполняется

$$\boldsymbol{Wx}=\boldsymbol{Wy}+\boldsymbol{Wn},$$

где $\boldsymbol{W}$ – оператор вейвлет преобразования.

Это означает, что коэффициенты двумерного вейвлет преобразования могут быть описаны как линейная комбинация соседних коэффициентов из четырех наборов $vv_{j,k}^{(i)}, vw_{j,k}^{(i)}$, $wv_{j,k}^{(i)}$, $ww_{j,k}^{(i)}$, $j,k\in\mathbf{Z}$. Собственно говоря, само свойство локальности, вейвлет преобразования позволяет вводить в рассмотрение локальные модели, и, соответственно, использовать для обработки локальные операторы.

Другой подход предполагает рассмотрение поля яркости, соответствующего изображению, как статистически однородного случайного поля. В данном случае задание модели сводится к количественному описанию тех или иных характеристик случайного поля: одномерной или многомерной плотности распределения вероятностей, функции корреляции и т.п. Очевидно, что подобный подход можно применить и для описания свойств вейвлет коэффициентов на разных уровнях разрешения. Наборы детализирующих коэффициентов $vw_{j,k}^{(i)}$, $wv_{j,k}^{(i)}$, $ww_{j,k}^{(i)}$ можно рассматривать как случайные двумерные некоррелированные поля, с нулевым средним[2]. Как показывает статистический анализ, хотя общая гистограмма всех коэффициентов вейвлет преобразования является экспоненциальной ($p(\xi=k)=exp(-\lambda k)$), гистограммы каждого отдельного шага преобразования являются симметричными, одномодальными, и, приближенно, могут быть приняты за нормальные.

Исходя из этого, математическая модель полутонового изображения может быть представлена в виде

$$f(x,y)=\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left(\xi_{1\,j,k}^{\ (i)}\varphi\psi_{j,k}^{(i)}(x,y)+\xi_{2\,j,k}^{\ (i)}\psi\varphi_{j,k}^{(i)}(x,y)+\right.$$
$$\left.+\,\xi_{3\,j,k}^{\ (i)}\psi\psi_{j,k}^{(i)}(x,y)\right), \qquad (2)$$

где $\xi_1^{(i)}, \xi_2^{(i)}, \xi_3^{(i)}$ - случайные поля, с нормальным распределением, нулевым средним и дисперсиями, соответственно, равными дисперсиям $vw^{(i)}$, $wv^{(i)}$, $ww^{(i)}$.

На рис. 1 представлены примеры модельных изображений синтезированных в соответствии с (2). Следует заметить, что, несмотря на то, что для синтеза использовались однородные поля коэффициентов, полученные изображения явно неоднородны, что хорошо соответствует свойствам реальных изображений. При этом основные числовые статистические характеристики для моделируемого изображения и модели совпадают

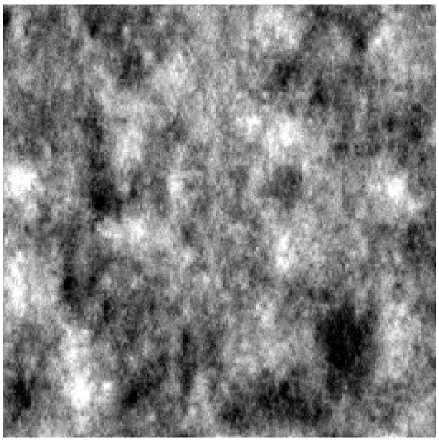 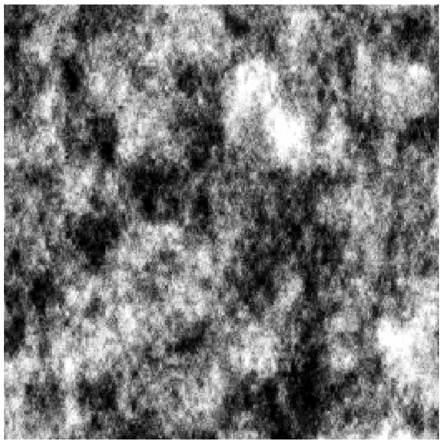

Рис 1. Полученные модельные изображения

Очевидно, что подобные модели являются весьма удобными при синтезе алгоритмов восстановления изображений, в частности, позволяют развить применительно к вейвлет – преобразованию изображений основные результаты классической теории фильтрации. Кроме того, данная модель, основанная на статистических свойствах коэффициентов разложения, позволяет описать процедуры вейвлет – сжатия изображений.

Альтернативным подходом к описанию изображения является его представление в виде совокупности областей, которые могут различаться по характеристикам. Разработка модели в рамках такого подхода заключается, во – первых, в описании пространственных признаков областей (размеров, взаимного расположения, формы границ и т.п.) и, во – вторых, в описании свойств поля внутри каждой области. Очевидно, что подобные модели, являются наиболее подходящими, для описания алгоритмов сегментации, выделения структурных элементов изображения и т.д. Главным их недостатком является высокая сложность: как правило, эти модели содержат большое число параметров, значения которых априори неизвестны и подлежат экспериментальной оценке.

Как показывает практика, во многих случаях, реальные изображения могут быть описаны моделью случайного поля в виде суммы двух компонент[3].

$$s(x,y) = s_1(x,y) + s_2(x,y) \,, \qquad (3)$$

где $s(x,y)$ - поле яркости; x, y – аргументы, определяющие плоскость изображения; $s_1(x,y)$ - медленно меняющееся поле двух переменных; $s_2(x,y)$-стационарное поле (текстурная компонента).

Такая модель хорошо согласуется с вейвлет – разложением изображения, так как оно также может быть представлено в виде суммы двух компонент

$$\begin{aligned} f(x,y) = {} & \sum_{j=-\infty}^{+\infty}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} vv_{j,k}\varphi\varphi(x,y) + \\ & + \sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left(\xi_{1\,j,k}^{(i)}\varphi\psi_{j,k}^{(i)}(x,y) + \xi_{2\,j,k}^{(i)}\psi\varphi_{j,k}^{(i)}(x,y) + \xi_{3\,j,k}^{(i)}\psi\psi_{j,k}^{(i)}(x,y)\right) \end{aligned} \qquad (4)$$

В качестве кусочно-постоянной компоненты может использоваться случайное поле с заданными свойствами. При этом может быть получен ансамбль изображений со сходными статистическими характеристиками и близких по структуре.

Литература

1. Белокуров А., Сечко В. Стохастические модели в задачах анализа и обработки изображений. – Зарубежная радиоэлектроника, 1994, №2, с. 21- 38
2. Переберин А.В. О систематизации вейвлет - преобразований. // Вычислительные методы и программирование. 2001.2. Раздел 3. с.15-40.
3. Виттих В.А., Сергеев В.В., Сойфер В.А. Обработка изображений в автоматизированных системах научных исследований. – М.:Наука, 1982. – 218 с.