ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АППАРАТА ВЕЙВЛЕТ-ФИЛЬТРАЦИИ В ЗАДАЧЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

Безуглов Д.А., Цугурян Н.О.
Ростовский институт сервиса ЮРГУЭС

В настоящее время существует ряд задач контроля непрерывных параметров измерительных процессов, когда непосредственному наблюдению доступен процесс $S(t)$, а информативным является его производная $S'(t)$.

Для математического решения данной задачи существует известный метод численного дифференцирования [1]. Но этот метод будет удовлетворительно работать лишь для функций, заданных в дискретных точках абсолютно точно. При решении задачи дифференцирования реальных процессов, он является некорректным вследствие наличия погрешности измерений.

Это связано со следующим. Математически задача численного дифференцирования состоит в том, чтобы найти максимально приближенное значение производной заданной функции $S(t)$(результатов измерений). Возьмем одно из разностных отношений, например [1]:

$$\frac{dS(t_k)}{dt} \approx S_{t,k} = \frac{t_k - t_{k-1}}{h}, \tag{1}$$

где h - шаг, $S(t_k)$ - выборка сигнала.

Погрешность, возникающая при вычислении разностных отношений, намного превосходит погрешность в задании значений функции $S(t_k)$ и даже может неограниченно возрастать при стремлении шага сетки h к нулю [1].

Целью настоящей работы является разработка алгоритма численного дифференцирования результатов измерений с использованием аппарата вейвлет-фильтрации.

Прямое дискретное вейвлет-преобразование вычисляется по следующей формуле:

$$CTWS_S(m,n) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\phi(a^{-m}t-n)S(t)dt, \tag{2}$$

где $\phi_{m,n}(t) = a^{-m/2}\psi(a^{-m}t-n)$ - дискретное значение вейвлет-функции, $m,n \in Z$, Z - множество действительных чисел.

Если $a=2$, то возможно восстановление сигнала в соответствии со следующим выражением [2]

$$S(t) = C_\psi \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} CTWS_S(m,n)a^{-m/2}\phi(a^{-m}t-n). \tag{3}$$

Рассмотрим возможности аппарата вейвлет-преобразования на примере дифференцирования нестационарных сигналов. Вычислим производную сигнала $S(t)$ с использованием вейвлет-преобразования:

$$\frac{dS(t)}{dt} = C_\psi \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} CTWS_s(m,n)a^{-m/2}\frac{d\phi(a^{-m}t-n)}{dt}. \tag{4}$$

Очевидно, что в этом случае, если $\frac{d\phi(a^{-m}t-n)}{dt}$ будет обладать всеми свойствами вейвлета, тогда возможно обратное вейвлет-преобразование. Рассмотрим выражение (2), представим его в виде

$$CTWS_{m,n} = \sum_{k=0}^{N-1}\phi(k,2^{m-1},n)S_k, \tag{5}$$

и запишем формулу (3) в следующей форме

$$S_k = \sum_{m=1}^{NK}\sum_{n=1}^{N-1}\phi(k,2^{m-1},n)CTWS_{m,n}, \tag{6}$$

где $m = 1...NK, n = 1...N-1, NK$ - число коэффициентов, k - количество отсчетов.

Последовательность преобразований при этом должна быть следующей:

1. Получаем выборки из непрерывного сигнала $S(t) \Rightarrow S_k(t)$;
2. Проводим прямое вейвлет-преобразование по формуле (2);
3. При обратном преобразовании используем выражение (4).

Пример. Зададим измеряемый нестационарный сигнал вида

$$S_k = (\sin(k/8)\sin(k/2))\exp(k/N), \tag{7}$$

$$\frac{dS_k}{dt} = 1/8\cos(k/8)\sin(k/2)\exp(k/N) + 1/2\sin(k/8)\cos(k/2)\exp(k/N) + \sin(k/8)\frac{\sin(k/2)}{N}\exp(k/N). \tag{8}$$

где $N = 256$ - количество отсчетов, $k = 0,1...N-1$.

Запишем разностное соотношение численного дифференцирования

$$S_{t,k} = \frac{S_k - S_{k-1}}{h}, \tag{9}$$

где $h = 0{,}2$ - шаг сетки.

Далее проведем прямое дискретное вейвлет-преобразование при помощи вейвлета «мексиканская шляпа»:

$$\psi(t) = (1-t^2)e^{\frac{-t^2}{2}} = e^{\frac{-t^2}{2}} - t^2 e^{\frac{-t^2}{2}}, \qquad \frac{d\psi(t)}{dt} = -t\psi(t) \tag{10}$$

Запишем вейвлет в дискретной форме

$$\phi(t,m,n) = a^{-m/2}(1-(a^{-m}t-n)^2)e^{-1/2(a^{-m}t-n)^2}. \tag{11}$$

$$\frac{d\phi(t,m,n)}{dt} = -2a^{-3/2m}(a^{-m}t-n)e^{-1/2(a^{-m}t-n)} - a^{-m}(a^{-m}t-n)\phi(t,m,n). \tag{12}$$

Для моделирования погрешности измерений добавим к исходному сигналу S_k с помощью датчика случайных чисел «белый» гауссовский шум N, с математическим ожиданием равным m_N и среднеквадратическим отклонением σ_N

$$S^N{}_k = S_k + N. \tag{13}$$

Дискретное вейвлет-преобразование найдем в соответствии с выражением:

$$CTWS_{m,n} = \sum_{k=0}^{N-1} a^{-m/2}(1-(a^{-m}k-n)^2)e^{-1/2(a^{-m}k-n)^2} S^N{}_k. \tag{14}$$

где $m = 1...NK$, $n = 1...N-1$, $NK = 6$, *N*- количество коэффициентов вейвлет-разложения.

Тогда можно записать формулу восстановления дифференцированного сигнала

$$\frac{dS_{k,w}}{dt} = \sum_{m=1}^{NK}\sum_{n=1}^{N-1}((-2)a^{-3/2m}(a^{-m}k-n)e^{-1/2(a^{-m}k-n)} - a^{-m}(a^{-m}k-n) * \\ * a^{-m/2}(1-(a^{-m}k-n)^2)e^{-1/2(a^{-m}k-n)^2})CTWS_{m,n}. \tag{15}$$

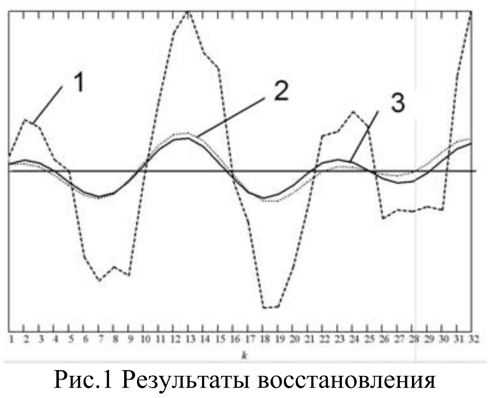

Рис.1 Результаты восстановления
1- значения производной, вычисленной по разностной схеме, 2 – значения аналитической производной, 3 - значения производной, вычисленной с использованием вейвлет-преобразования

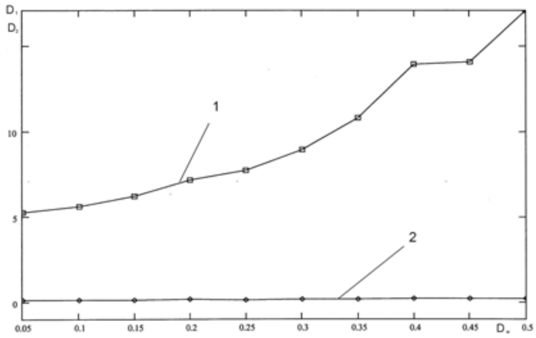

Рис. 2 Зависимость величины дисперсии от дисперсии шума
1 - дисперсия для разностной схемы вычисления производной, 2 - дисперсия для сигнала, дифференцированного с использованием вейвлет-преобразования .

Для оценки точности дифференцирования дисперсия рассчитывалась в соответствии со следующими выражениями

$$D_1 = \frac{1}{N-1}\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{dS(t_k)}{dt} - S_{t,k}\right)^2, \; D_2 = \frac{1}{N-1}\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{dS_{k,w}}{dt} - \frac{dS_k}{dt}\right)^2,$$

где D_1 - дисперсия для разностной схемы вычисления производной, D_2 - дисперсия для сигнала, дифференцированного с использованием вейвлет-преобразования.

Выводы. Предложенный метод вейвлет-преобразования дает возможность дифференцировать результаты измерений с меньшей погрешностью, чем разностная схема. Это хорошо видно из рис. 2. При зашумленном сигнале разностная схема дифференцирования начинает давать значительную погрешность, а вейвлет-преобразование восстанавливает производную сигнала. При восстановлении дифференцированного сигнала использовалось ограниченное число вейвлет-коэффициентов, что дает возможность фильтровать сигнал от шума с минимальным вычислительными затратами. При этом погрешность дифференцирования практически не зависит от дисперсии шума (погрешности измерений).

Настоящая работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования РФ, грант по разделу «Технические науки», шифр -Т02-02.5-3088.

Литература

1. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы: Учеб. пособие для вузов. – М.: Наука, 1989.
2. Воробьев В.И., Грибунин В.Г. Теория и практика вейвлет-преобразования. – СПб.: ВУС, 1999.