ВЛИЯНИЕ ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ВЕЙВЛЕТ-ФИЛЬТРОВ НА КАЧЕСТВО ВОССТАНОВЛЕНИЯ СИГНАЛОВ

Кобелев В.Ю., Корепанов И.В., Моисеев А.А.

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова
150000, Россия, Ярославль, ул. Советская, 14, тел. (0852) 79-77-75, E-mail: dcslab@uniyar.ac.ru

В настоящее время представлено большое количество различных публикаций, касающихся темы адаптивного вейвлет-преобразования сигналов. В большинстве своем представлены работы связанные с адаптацией на поздней стадии обработки: когда получены коэффициенты вейвлет-разложения и адаптивным образом осуществляется их выборка. Гораздо в меньшем объеме представлены работы, касающие адаптации на ранней стадии обработки: еще при выборе вейвлет-функции. Работа посвящена вопросам выбора вейвлет-функции на начальном этапе обработки. В ней рассматривается влияние частотных характеристик вейвлет-фильтров на качество сжатия/восстановления сигналов. Предпосылками такого подхода являются работа [1], в которой рассматривается идея формирования вейвлет-фильтра с адаптивно перестраиваемыми коэффициентами импульсной характеристики, и работа [2], содержащая информацию о роли фазовой и амплитудной характеристик цифровых фильтров при обработке изображений.

В работе используется методика сжатия сигналов при помощи ортогональных вейвлетов, соответствующая стандартному методу Малла с отбрасыванием высокочастотных компонент разложения [3]. Под термином вейвлет-фильтр с безошибочным восстановлением понимается фильтр, при использовании которого в рамках предложенной модели вейвлет-обработки сигналов достигается нулевая ошибка восстановленного сигнала. Термин низкочастотный вейвлет-фильтр описывает цифровой фильтр, импульсная характеристика которого представлена коэффициентами масштабирующего уравнения на вейвлет-функцию.

Рассмотрим Фурье-образ восстановленного сигнала после двукратного сжатия:

$$F^0_{восст}(j\omega)=H(j\omega)H(-j\omega)F^0(j\omega)+H(j(\omega+\pi))H(-j\omega)F^0(j(\omega+\pi)), \qquad (1)$$

где $H(j\omega)=\sum\limits_{k=0}^{M-1}h_k e^{-j\omega k}$ - частотная характеристика вейвлет-фильтра,

$F^0(j\omega)=\sum\limits_{k=0}^{M-1}f_k e^{-j\omega k}$ - Фурье-образ оригинального сигнала,

$F^0_{восст}(j\omega)=\sum\limits_{k=0}^{M-1}f_k^{восст} e^{-j\omega k}$ - Фурье-образ восстановленного сигнала.

Второе слагаемое выражения (1) представляет влияние эффектов наложения, возникающих при уменьшении в два раза частоты дискретизации, норма которого в общем случае есть мощность одной из составляющих ошибки восстановленного сигнала. Однако, зачастую при соответствующем выборе частотной характеристики фильтра $H(j\omega)$, удается добиться некоторой корреляции первого и второго слагаемых (1) и тем самым снизить суммарную мощность ошибки.

Сделав предположение о равенстве спектров восстановленного и оригинального сигналов, получим уравнение на ФЧХ вейвлет-фильтра, при использовании которого норма отклонения восстановленного сигнала от оригинала была бы равна нулю

$$\arg(F^0(j\omega))-\arg(F^0(j(\omega+\pi)))=\arg(H(j(\omega+\pi)))-\arg(H(j\omega)). \qquad (2)$$

Аналогичное условие на амплитудно-частотную характеристику было рассмотрено в работе [1]:

$$H^2(\omega)=F^2(\omega)/(F^2(\omega+\pi)+F^2(\omega)). \qquad (3)$$

Проанализируем уравнение (2). Обозначим

$$\varphi_f(\omega)\equiv\arg(F^0(j\omega)),\ \varepsilon(\omega)\equiv\varphi_f(\omega)-\varphi_f(\omega+\pi), \qquad \varphi(\omega)\equiv\arg(H(j\omega)).$$

Пусть функция $\varphi(\omega)$ удовлетворяет условию;

$$\varphi(\omega)=-\varepsilon(\omega)/2+\chi(\omega),$$

где $\chi(\omega)$ – некоторая функция, удовлетворяющая условию полученному после соответствующей подстановки в уравнение (2):

$$\chi(\omega+\pi)-\chi(\omega)=2\pi n.$$

Получено, что приведенному выше условию на $\chi(\omega)$ удовлетворяет единственное решение:

$$\chi(\omega)=-N\omega/2,$$

где N – целое число, кратное 4.

Получено условие на $\varphi(\omega)$:

$$\varphi(\omega) = -\varepsilon(\omega)/2 - N\omega/2 . \qquad (4)$$

Совокупность уравнений (3) и (4) представляет собой требование к вейвлет-фильтру с безошибочным восстановлением. Так как такой фильтр достижим в большинстве случаев только при порядках, сопоставимых с длиной сигнала, возникает задача синтеза вейвлет-фильтров невысоких порядков, характеристики которых в некоторой степени приближающиеся к "идеальным характеристикам" (далее такой фильтр для краткости будем называть аппроксимирующим).

Проанализируем взаимосвязь ошибки восстановления сигналов и погрешности аппроксимации частотных характеристик фильтров с безошибочным восстановлением $H_{otp}(j\omega)$ реальными вейвлет-фильтрами $H_{real}(j\omega)$ невысоких порядков. Введем следующие обозначения:

$$\delta(\omega) = H_{real}(\omega)/H_{opt}(\omega), \qquad \varepsilon(\omega) = \varphi_{real}(\omega) - \varphi_{opt}(\omega).$$

С учетом уравнений (1), (2) и выделения $e^{j\varphi_f(\omega)}$, получим

$$F_{вост}{}^{0}(j\omega) = e^{j\varphi_f(\omega)}(\delta^2(\omega)H_{opt}{}^{2}(\omega)F^0(\omega) + \delta(\omega)\delta(\omega+\pi)\times$$
$$\times H_{opt}(\omega+\pi)H_{opt}(\omega)F^0(\omega+\pi)e^{j(\varepsilon(\omega+\pi)-\varepsilon(\omega))}).$$

С учетом (3), проведя некоторые преобразования, получим:

$$H_{opt}(\omega+\pi)H_{opt}(\omega)F(\omega+\pi) = F(\omega)H^2{}_{opt}(\omega+\pi),$$

$$F^0_{вост}(j\omega) = F^0(j\omega)\left(\delta^2(\omega)H^2_{\text{opt}}(\omega) + \delta(\omega)\delta(\omega+\pi)H^2{}_{opt}(\omega+\pi)e^{j(\varepsilon(\omega+\pi)-\varepsilon(\omega))}\right).$$

Как следствие ортогональности вейвлет-функции применим свойство зеркальности фильтра:

$$H^2_{opt}(\omega) + H^2_{opt}(\omega+\pi) = 1,$$

следовательно

$$F^0_{вост}(j\omega) = F^0(j\omega)\left(H^2_{\text{opt}}(\omega)\left(\delta^2(\omega) - \delta(\omega)\delta(\omega+\pi)e^{j(\varepsilon(\omega+\pi)-\varepsilon(\omega))}\right) + \delta(\omega)\delta(\omega+\pi)e^{j(\varepsilon(\omega+\pi)-\varepsilon(\omega))}\right). \qquad (5)$$

Введем в выражении (5) функцию $D(j\omega)$,

$$D(j\omega) = H^2_{opt}(\omega)\left(\delta^2(\omega) - \delta(\omega)\delta(\omega+\pi)e^{j(\varepsilon(\omega+\pi)-\varepsilon(\omega))}\right) + \delta(\omega)\delta(\omega+\pi)e^{j(\varepsilon(\omega+\pi)-\varepsilon(\omega))}. \qquad (6)$$

Функция $D(j\omega)$, определяемая выражением (6), представляет собой частотную характеристику канала обработки данных, более детально представленного на рис.1.

На рис. 1 представлена схема прямого и обратного вейвлет-преобразований с использованием стандартных блоков: блоки прямого вейвлет-преобразования (предварительная фильтрация фильтром $H_{real}(j\omega)$, децимация с коэффициентом 2 с целью устранения избыточности) и блоки обратного вейвлет-преобразования (интерполяция и конечная сглаживающая фильтрация).

Нижняя цепочка представляет собой высокочастотные компоненты вейвлет-обработки $F_{ВЧ}(j\omega)$, которые, в соответствии с принятой моделью, отбрасываются. А так как суммарная мощность восстановленного сигнала (низкочастотная часть) и ошибки равны мощности исходного сигнала, то функция $(1 - D(j\omega))$ представляет собой функцию ошибки канала обработки.

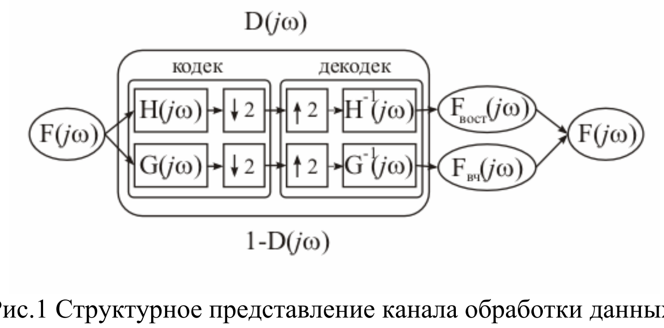

Рис.1 Структурное представление канала обработки данных.

Частотная характеристика $D(j\omega)$ изначально проектировалась как функция расстройки по амплитуде и по фазе. С учетом введенных обозначений получим выражение (7), определяющее Фурье-образ восстановленного сигнала.

$$F^{0}_{вост}(j\omega) = D(j\omega,\ \delta(\omega),\ \varepsilon(\omega))F^{0}(j\omega) \qquad (7)$$

Применимость выражений (6), (7) рассмотрим на примере следствия:

Следствие. При раздельном проектировании АЧХ и ФЧХ аппроксимирующих вейвлет-фильтров, при определенных условиях погрешности представления АЧХ можно скомпенсировать, введя дополнительную расстройку в определение ФЧХ.

На рис. 2 представлена зависимость модуля частотной характеристики $|D(j\omega)|$ от отклонения частотных характеристик аппроксимирующего фильтра от "идеальных". Расчет выполнялся для фиксированной частоты при трех значениях отклонения по амплитуде. По оси ординат откладывается значение модуля $|D(j\omega)|$, по оси абсцисс откладывается значения расстройки по фазе. Так как наилучшее значение модуля $|D(j\omega)|$ есть единица, то особый интерес представляют точки пересечения кривых с прямой, проходящей через единицу, параллельно оси абсцисс. Следовательно, при определенных условиях отклонение по амплитуде аппроксимирующего фильтра можно полностью скомпенсировать фазовой коррекцией.

Дополнительно необходимо отметить, что если даже дополнительная коррекция фазы использоваться не будет, синтез аппроксимирующих фильтров в канале обработке с использованием только амплитуды даст значительные искажения информации в канале обработки.

При исследовании представленных выражений по другим параметрам (например, по расстройке по амплитуде) можно получить набор вспомогательных правил и свойств, полезных при синтезе аппроксимирующего фильтра.

Полученные результаты могут быть применены:

- для расчета частотных характеристик вейвлет-фильтров с безошибочным восстановлением;
- для расчета весовой функции при решении задачи синтеза реальных вейвлет-фильтров путем аппроксимации частотных характеристик;
- для раздельного анализа влияния отклонений как фазовых, так и амплитудных частотных характеристик реальных вейвлет-фильтров на ошибку восстановленного сигнала;
- для расчета частотной характеристики канала обработки данных, анализа и предсказывания вносимых искажений.

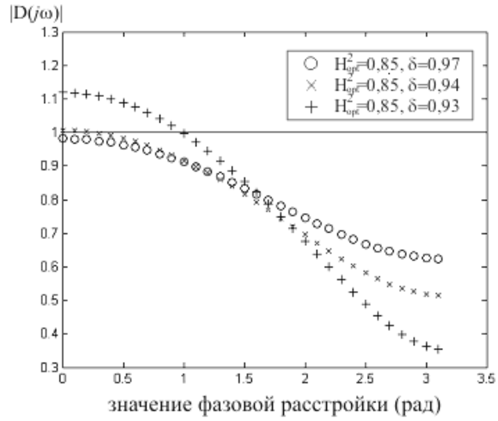

Рис. 2. Зависимость модуля частотной характеристики канала обработки данных от фазовой расстройки

Литература

1. Кобелев В.Ю., Корепанов И.В., Буралков Д.В. Параметризация и особенности представления вейвлет-фильтров на z-плоскости // Доклады 6-ой междунар. конф. и выставки "Цифровая обработка сигналов и ее применение" (DSPA'04), Москва, 2004. Т. 2, С. 122-124.
2. Реконструкция изображений / Под ред. Г. Старка. – М.: Мир, 1992.
3. Добеши И. Десять лекций по вейвлетам: Пер. с англ. - Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотичная динамика", 2001.