

ВОССТАНОВЛЕНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ ПО ДИСКРЕТНЫМ ОТСЧЕТАМ

Васильев К.К., Служивый М.Н.

Ульяновский государственный технический университет

Во многих приложениях [1-3] возникает задача восстановления непрерывного в R^n случайного поля (СП) $x(\bar{t}), \bar{t} \in R^n$, по наблюдениям $z(\bar{t}_i), i=1,2,\dots,N$, сделанным в N точках $\bar{t}_i \in R^n, i=1,2,\dots,N$ (рис. 1). Важными примерами таких применений являются системы обработки данных глобального мониторинга Земли, сжатия изображений и томографии [4, 7, 8]. В последние годы методы решения задач восстановления изображений применяются при проектировании многочастотных цифровых систем мобильной связи 4 поколения. В таких системах для оценки амплитудно-фазовых искажений, возникающих из-за многолучевого распространения радиоволн и доплеровских сдвигов несущих, используются пилот-сигналы, вставляемые в кадр передаваемых данных [5].

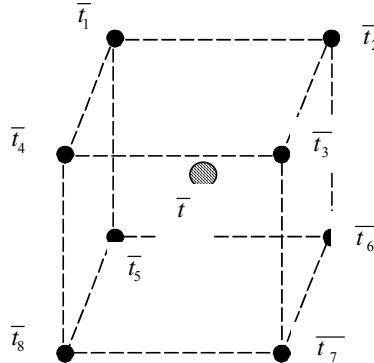


Рис. 1

Для получения оптимальных (в смысле минимума дисперсии ошибки) оценок $\mathfrak{K}(\bar{t})$ СП $x(\bar{t})$ по наблюдениям $z(\bar{t}), \bar{t} \in D$, обычно используются винеровские или калмановские процедуры линейной фильтрации [1-7]. Для ряда моделей таких СП получены оценки эффективности фильтрации. Вместе с тем, в известных работах практически отсутствуют результаты анализа алгоритмов интерполяции СП, т.е. получение оценок $\mathfrak{K}(\bar{t}), \bar{t} \neq \bar{t}_i, i=1, 2, \dots, N$, по дискретным наблюдениям $z(\bar{t}_i)$ в отдельных точках СП. В настоящей работе получены относительно простые формулы для максимальной дисперсии ошибки интерполяции СП в R^n по наблюдениям $z(\bar{t}_i)$ в точках \bar{t}_i , находящимся в ближайших узлах n -мерной прямоугольной сетки (рис. 1). При этом максимальная дисперсия ошибки $\sigma_e^2 = M \{(\mathfrak{K}_0 - x_0)^2\}$ будет соответствовать оценке $\mathfrak{K}_0 = \mathfrak{K}(\bar{t})$ в точке \bar{t} , находящейся в центре n -мерного параллелепипеда. При одинаковой «информативности» всех наблюдений интерполяционная оценка оказывается наиболее простой:

$$\mathfrak{K}_0 = \alpha_0 \sum_{i=1}^N z(\bar{t}_i), \tag{1}$$

где $\alpha_0 = \sum_{i=1}^N B_{xz}(i,0) / \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N B_z(i,j)$ - оптимальный весовой коэффициент; $B_{xz}(i,0) = M \{x_0 z(\bar{t}_i)\}$; $B_z(i,j) = M \{z(\bar{t}_i) z(\bar{t}_j)\}$. Нетрудно показать, что дисперсия ошибки при оптимальной интерполяции находится по формуле

$$\sigma_e^2 = \sigma_x^2 - \alpha_0 \sum_{i=1}^N B_{xz}(i,0), \tag{2}$$

где $\sigma_x^2 = M \{x_0^2\}$. Таким образом, при заданных вероятностных характеристиках СП $z(\bar{t})$ и $x(\bar{t})$ может быть рассчитана максимальная дисперсия оптимальной линейной интерполяции.

В качестве примера рассмотрим разделимое СП $x(\bar{t})$ с корреляционной функцией (КФ)

$$B_x(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) = \sigma_x^2 \prod_{j=1}^n R(\tau_j),$$

где $R(\tau_j)$ - нормированная КФ по j -й координате. При этом будем полагать, что наблюдения представля- ют собой аддитивную смесь $z(\bar{t}_i) = x(\bar{t}_i) + \theta(\bar{t}_i)$ информационного СП и независимых гауссовских случай- ных величин с нулевыми средними и дисперсиями $\sigma_\theta^2 = M\{\theta(\bar{t}_i)^2\}$. Для рассматриваемого примера формула (2) преобразуется к виду

$$\sigma_{\varepsilon \min}^2 = \sigma_X^2 \left[1 - \frac{2^n \rho_1 \rho_2 \dots \rho_n}{f(\rho)} \right], \quad (3)$$

где $f(\rho) = 1 + \frac{1}{q} + \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} \sum_{\substack{i_1=1 \\ i_2=1 \\ \dots \\ i_k=1 \\ i_1 \neq i_2 \neq \dots \neq i_k}}^n \rho_{i_1} \rho_{i_2} \dots \rho_{i_k} \right)$.

В частности, при оценивании по двум наблюдениям (n=1) $\alpha = \frac{\rho_1 q}{q(1 + \rho_1) + 1}$,

$$\sigma_{\varepsilon \min}^2 = \sigma_X^2 - \alpha \sum_{i=1}^2 M[y_i x_0] = \sigma_X^2 [1 - 2\alpha \rho_1];$$

при оценивании по четырем наблюдениям (n=2) $\alpha = \frac{\sqrt{\rho_1 \rho_2}}{1 + \frac{1}{q} + \rho_1 + \rho_2 + \rho_1 \rho_2}$,

$$\sigma_{\varepsilon \min}^2 = \sigma_X^2 - \alpha \sum_{i=1}^4 M[y_i x_0] = \sigma_X^2 [1 - 4\alpha \sqrt{\rho_1 \rho_2}];$$

при оценивании по восьми наблюдениям (n=3) (рис. 1)

$$\alpha = \frac{\sqrt{\rho_1 \rho_2 \rho_3}}{1 + \frac{1}{q} + \rho_1 + \rho_2 + \rho_3 + \rho_1 \rho_2 + \rho_2 \rho_3 + \rho_1 \rho_3 + \rho_1 \rho_2 \rho_3},$$

$$\sigma_{\varepsilon \min}^2 = \sigma_X^2 - \alpha \sum_{i=1}^8 M[y_i x_0] = \sigma_X^2 [1 - 8\alpha \sqrt{\rho_1 \rho_2 \rho_3}],$$

где $q = \frac{\sigma_X^2}{\sigma_\theta^2}$ - отношение сигнал/шум, ρ_1, ρ_2, ρ_3 - коэффициенты корреляции между элементами СП

$x(\bar{t}_i)$ вдоль соответствующих координатных осей.

На рис. 2 показаны зависимости разности дисперсий ошибки оценивания

$$D = \frac{\sigma_{\varepsilon N/2}^2 - \sigma_{\varepsilon 1}^2}{\sigma_{\varepsilon N/2}^2} \square (100 \%)$$

для крайнего и центрального отсчетов между соседними узлами при различных ОСШ, что позволяет сде- лать вывод о том, что с увеличением ОСШ растет разница в дисперсии ошибки оценивания на краях (узлах или, что то же самое, местах расположения пилот-сигналов) и в центре.

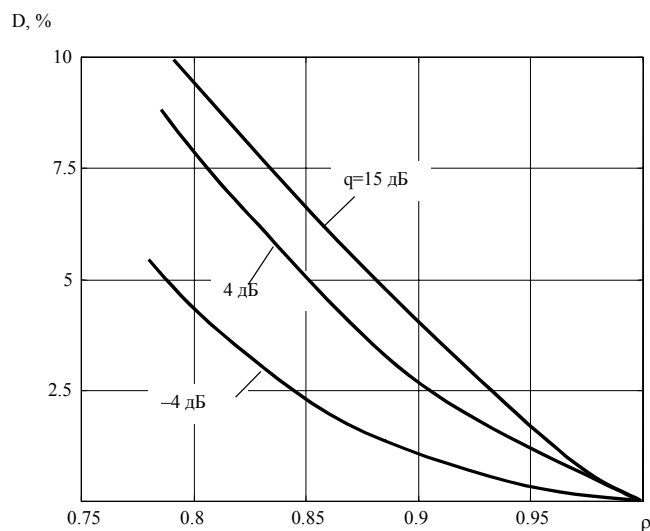


Рис. 2.

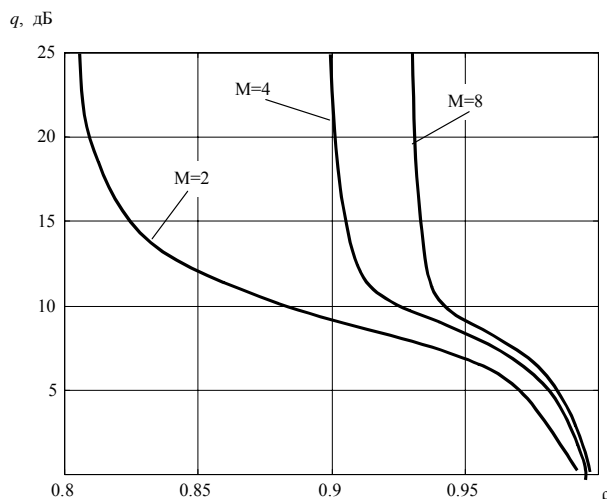


Рис. 3.

На рис. 3 показаны зависимости минимального коэффициента корреляции ρ от ОСШ при заданном граничном условии $\frac{\sigma_{\varepsilon}^2}{\sigma_x^2} < 0.1$ для различных размерностей случайного поля, выраженных количеством точек наблюдений (узлов) ($M=2, 4, 8$ соответствуют одно-, двух- и трехмерному полю), равноотстоящих от точки, в которой делается прогноз, что позволяет сделать вывод о том, что оценку целесообразно производить при достаточно сильно коррелированных сигналах $\rho > 0.9$, причем граничный коэффициент корреляции возрастает с увеличением размерности случайного поля, что видно из рис. 3.

Полученные результаты позволяют по заданной допустимой дисперсии ошибки определить необходимые корреляционные расстояния между наблюдениями, требуемыми для восстановления непрерывного информационного СП.

Поддержано грантом РФФИ 03-01-00370

Литература

1. Витгих В.А., Сергеев В.В., Соيفер В.А. Обработка изображений в автоматизированных системах научных исследований. – М.: Наука, 1982. – 312 с.
2. Цифровая обработка изображений в информационных системах. Уч.пос. / И.С.Грузман, В.С.Киричук и др. – Новосибирск: НГТУ, 2002. – 352 с.
3. Прэтт У. Цифровая обработка изображений. Пер. с англ. Под ред. Д.С.Лебедева. – М.: Мир, 1982. – 790 с.

4. Методы компьютерной обработки изображений. Учебное пособие (2-е издание). Под ред. В.А.Сойфера. – М.: Физматлит, 2004. –317 с.
5. Hoehner P., Kaiser S., Robertson P. “Two-Dimensional Pilot-symbol-aided Channel Estimation by Wiener Filtering” IEEE GLOBECOM’97, Phoenix, Arizona, November, 1997.
6. Васильев К.К., Крашенинников В.Р. Методы фильтрации многомерных случайных полей.- Саратов: СГУ, 1990. – 128 с.
7. Прикладная теория случайных процессов и полей / Под ред. К.К. Васильева и В.А. Омельченко. – Ульяновск: УлГТУ, 1995. – 256 с.
8. Vasiliev K., Sluzhiviyi M. Errors of Random Field Restoration Based on Discrete Samples // The Proceedings of the 7th International Conference on Pattern Recognition and Image Analysis: New Information Technologies, PRIA-7-2004, St. Petersburg, Russian Federation, 18-23 October, 2004, pp. 130-132.

