ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ КВАНТОВОЙ ИНФОРМАТИКИ В ЗАДАЧАХ ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКИ СТАТИСТИЧЕСКИХ ДАННЫХ

Богданов Ю.И.[1], Богданова Н.А.[2]
[1]Физико- технологический институт РАН
[2]Московский институт электронной техники (технический университет)

Квантовая информатика представляет собой новую, быстро развивающуюся область науки и технологии, основанную на использовании квантовых систем для реализации принципиально новых методов передачи сообщений и вычислений (квантовые каналы связи, квантовая криптография, квантовый компьютер) [1].

На пути создания эффективных систем обработки квантовой информации стоит ряд трудных проблем, среди которых одна из основных – это «хрупкость» и «неуловимость» квантового состояния- основного объекта квантовой физики и соответственно квантовой информатики. Квантовое состояние характеризуется так называемым вектором состояния, который представляет собой комплексный вектор в абстрактном гильбертовом пространстве, описывающий амплитуды вероятностей наблюдения соответствующих базисных состояний. Вектор состояния является носителем информации принципиально отличным от соответствующих классических аналогов. Важная отличительная черта квантовых систем по сравнению с классическими – это принципиальная необходимость *статистического* описания их поведения. Измерение, проводимое над индивидуальным квантовым объектом, приводит к изменению его квантового состояния (редукция волновой функции). Это обстоятельство приводит к необходимости статистического (ансамблевого) подхода: каждый акт измерения сопровождается разрушением квантового состояния микрообъекта, однако у экспериментатора в распоряжении имеется не единичный объект, а ансамбль.

Квантовый регистр, включающий n квантовых битов (кубитов) описывается вектором состояния, содержащим 2^n комплексных чисел. Со статистической точки зрения это означает, что контроль квантовой системы сводится к многопараметрической задаче восстановления состояния квантового статистического ансамбля по измерениям, проводимым на отдельных его представителях.

С практической точки зрения многопараметрическая задача восстановления квантовых состояний играет важную роль при реализации всех трех основных взаимосвязанных задач, с которыми сталкивается разработчик квантовых информационных систем: генерация квантовых систем в определенных квантовых состояниях; их преобразование в процессе передачи по квантовому каналу связи или в процессе квантовых вычислений; считывание (измерение) выходного состояния системы. Умение восстанавливать квантовые состояния обеспечивает базу для решения таких задач как юстировка квантовых информационных систем, контроль точности и стабильности их работы, обнаружение постороннего вмешательства в систему и др.

Многопараметрическое статистическое оценивание квантовых состояний, безусловно, представляет интерес также и с фундаментальной точки зрения, поскольку дает инструмент для анализа таких базовых понятий квантовой теории как статистический характер ее предсказаний, принцип суперпозиции, принцип дополнительности Н. Бора и др.

Среди возможных методов восстановления квантовых состояний наибольшее значение имеют методы, позволяющие получить точность оценивания, близкую к принципиально достижимой в задачах высокой размерности. Построение таких оценок на базе традиционных методов математической статистики наталкивается на трудности вычислительного характера, которые быстро становятся непреодолимыми по мере роста размерности задачи. Выделенной универсальной статистической моделью, допускающей устойчивое асимптотически эффективное восстановление параметров по наблюдениям, оказывается так называемая корневая модель, в которой структура статистической теории оказывается согласованной изначально со структурой вероятности в квантовой механике [2].

Приложение корневого подхода к задачам квантовой томографии и квантовой криптографии позволило в рамках совместных работ, проведенных ФТИАН и МГУ, экспериментально доказать возможность восстановления квантовых состояний с точностью, существенно превосходящей точность, достигнутую в работах других авторов [3,4].

Предложенный подход основан на «симбиозе» математического аппарата квантовой механики с принципом максимального правдоподобия Фишера с целью получения многопараметрических асимптотически эффективных оценок плотности и квантовых состояний, обладающих наиболее простыми (и фундаментальными) статистическими свойствами. Новый метод основан на представлении плотности вероятности как квадрата модуля некоторой функции (называемой пси-функцией по аналогии с квантовой механикой). Пси – функция представляется в виде разложения по ортонормированному набору функций. Коэффициенты разложения оцениваются методом максимального правдоподобия.

Введение пси - функции как математического объекта статистического анализа данных означает, что вместо плотности распределения рассматривается «квадратный корень из нее», т.е.:

$$p(x)=|\psi(x)|^2$$

Предполагается, что пси – функция зависит от s неизвестных параметров $c_0, c_1, \ldots, c_{s-1}$, которые являются коэффициентами разложения по некоторому набору ортонормированных базисных функций:

$$\psi(x)=\sum_{i=0}^{s-1} c_i \varphi_i(x)$$

Метод максимального правдоподобия заключается в том, что в качестве «наиболее правдоподобных» оценок неизвестных параметров $c_0, c_1, \ldots, c_{s-1}$ берутся значения, при которых функция правдоподобия и ее логарифм становятся максимальными.

$$\ln L=\sum_{k=1}^{n} \ln p(x_k|c) \to \max$$

Здесь $x_1, \ldots, x_n$ - выборка объема n.

Условие экстремума логарифмического правдоподобия с учетом условия нормировки приводит к следующему уравнению правдоподобия (здесь предполагается, что базисные функции $\varphi_i(x)$ и вектор состояния c действительны):

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\varphi_i(x_k)}{\sum_{j=0}^{s-1} c_j \varphi_j(x_k)}\right)=c_i \qquad i=0,1,\ldots,s-1$$

Уравнение правдоподобия имеет простую квазилинейную структуру и допускает построение эффективной, быстросходящейся итерационной процедуры, пригодной в случае многопараметрических задач (например, когда число оцениваемых параметров достигает многих десятков, сотен и даже тысяч) [2]. Этим рассматриваемая задача выгодно отличается от других известных задач, решаемых методом максимального правдоподобия, когда с увеличением числа оцениваемых параметров сложность численного исследования быстро возрастает, а устойчивость алгоритмов резко падает.

Для определенности мы рассмотрели выше случай непрерывного распределения. Случай дискретного распределения рассматривается совершенно аналогично.

Представим некоторые основные наборы базисных функций, которые удобно использовать для целей численного анализа в задачах восстановления статистических распределений по экспериментальным данным.

Базисный ортонормированный набор функций Чебышева – Эрмита имеет вид:

$$\varphi_k(x)=\frac{1}{\left(2^k k!\sqrt{\pi}\right)^{1/2}} H_k(x)\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right), \qquad k=0,1,2,\ldots$$

Здесь $H_k(x)$- полином Чебышева – Эрмита k - го порядка.

Рассматриваемый базис, как известно, описывает стационарные состояния квантового гармонического осциллятора.

Удобство базиса Чебышева – Эрмита заключается, в частности, в том, что, если в нулевом приближении распределение считать гауссовым, то это достигается просто выбором основного состояния осциллятора, а описание отклонений от «гауссовости» достигается посредством добавления вклада высших гармоник в вектор состояния. Заметим, что итоговое распределение может очень сильно отличаться от своего нулевого приближения (может быть асимметричным, многомодальным и т.д.).

Рассматриваемый набор базисных функций может быть эффективно и с высокой точностью применен для задач восстановления произвольных статистических распределений, заданных на всей числовой прямой ($-\infty < x < +\infty$).

Для распределений, заданных на полупрямой (например, при $0 \le x < +\infty$), удобно использовать другой базисный ортонормированный набор функций, основанный на полиномах Лагерра. Соответствующие базисные функции имеют вид:

$$\varphi_k(x) = L_k(x)\exp\left(-\frac{x}{2}\right), \qquad k = 0,1,2,...$$

Здесь $L_k(x)$ - полином Лагерра k - го порядка.

В рассматриваемом наборе базисных функций основное состояние ($k=0$) соответствует экспоненциальному распределению. Учет высших гармоник в разложении пси- функции описывает отклонение статистического распределения от экспоненциального распределения.

Две основные модели дискретных распределений математической статистики – это, соответственно, биномиальное распределение и распределение Пуассона. При корневом подходе эти распределения выступают в качестве нулевых приближений при восстановлении дискретных распределений общего вида.

Базисный ортонормированный набор функций на основе полиномов Кравчука позволяет описывать многопараметрические распределения биномиального типа. Соответствующие дискретные распределение заданы в точках $x = 0,1,2,...,N$. По аналогии с обычным биномиальным распределением можно сказать, что случайная величина x есть число «успехов» в серии из N «испытаний». В нулевом приближении рассматриваемое распределение есть обычное биномиальное распределение. Базисные функции задаются формулой:

$$\varphi_k(x) = \left(\frac{k!(N-k)!}{(pq)^k}\frac{p^x q^{N-x}}{x!(N-x)!}\right)^{1/2} K_k^p(x), \qquad k = 0,1,2,...,N$$

Здесь p - параметр, отвечающий средней вероятности «успеха», $q = 1-p$, $K_k^p(x)$ - полином Кравчука k - го порядка, отвечающий заданному p.

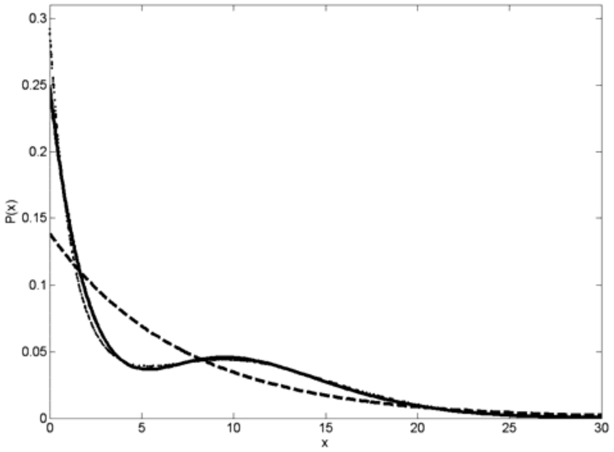
Базисный ортонормированный набор функций на основе полиномов Шарлье позволяет моделировать многопараметрические распределения пуассоновского типа. Соответствующие распределения заданы в неотрицательных целых точках $x = 0,1,2,...$. В нулевом приближении рассматриваемое распределение есть обычное пуассоновское распределение. Базисные функции имеют вид:

$$\varphi_k(x) = \left(\frac{\lambda^{k+x}e^{-\lambda}}{k!x!}\right)^{1/2} C_k^{\lambda}(x), \qquad k = 0,1,2,...$$

Здесь λ - параметр, отвечающий среднему числу «успехов» (среднему значению случайной величины x), $C_k^{\lambda}(x)$ - полином Шарлье k - го порядка, отвечающий заданному λ.

Для иллюстрации, на рисунки приведены примеры восстановления статистических распределений с использованием описанного выше метода. Видно очень близкое соответствие (практическое совпадение) между теоретическими распределениями (сплошные линии) и корневыми оценками (точки). Для сопоставления на том же рисунки приведены результаты, которые могут быть получены с использованием традиционных методов. Точность последних, как это видно из рисунка, невелика.

Проведенные исследования показали также существенное преимущество описываемого здесь корневого подхода к восстановлению статистических распределений по сравнению с ядерными оценками Розенблатта- Парзена и проекционными оценками Ченцова.



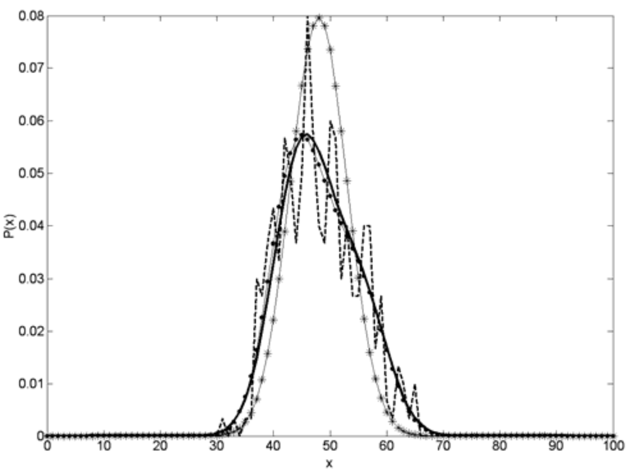


Рисунок. Примеры восстановления статистических распределений. Слева- восстановление распределения, представляющего собой смесь в равной пропорции экспоненциального распределения со средним, равным 2, и распределения хи- квадрат с 12 степенями свободы. Объем выборки 400. Сплошная линия- теоретическая плотность, точки- корневая оценка с использованием базиса на основе полиномов Лагерра, штриховая линия- экспоненциальная оценка. Справа- восстановление распределения, представляющего собой смесь в пропорции 2:1 биномиальных распределений с параметрами $p_1 = 0.45$ и $p_2 = 0.55$ соответственно. Объем выборки 300. Сплошная линия- теоретическое распределение вероятностей, точки- корневая оценка с использованием базиса на основе полиномов Кравчука, звездочки- биномиальная оценка, штриховая линия- частотная оценка.

Литература

1. *Валиев К.А.*, *Кокин А.А.* Квантовые компьютеры: Надежды и реальность. 2-е изд., испр. М.–Ижевск: НИЦ РХД, 2002. 320 с
2. *Ю.И. Богданов* Многопараметрические статистические модели в задачах квантовой информатики //Труды ФТИАН. 2005. Т.18. С.91-118; *Богданов Ю.И.* Основная задача статистического анализа данных: Корневой подход. М.: МИЭТ, 2002. 96с. Пер. на англ.: *Bogdanov Yu. I.* Fundamental problem of statistical data analysis: Root approach. M.: MIEE, 2002. 84 p.; *Bogdanov Yu. I.* Statistical inverse problem // LANL E-print, 2002, arXiv: phys/0211109. 39p.
3. *Bogdanov Yu.I., Chekhova M.V., Kulik S.P.* et al. Statistical reconstruction of qutrits // Phys. Rev. A. 2004. Vol. 70. 042303. 16 p.
4. *Bogdanov Yu.I., Chekhova M.V., Kulik S.P.* et al. Qutrit state engineering with biphotons // Phys. Rev. Lett. 2004. Vol. 93. 230503. 4p.