БЫСТРОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ-ГЕЙЗЕНБЕРГА В КАЧЕСТВЕ ИСТИННОГО КВАНТОВОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ И ИНТЕРФЕЙСА МЕЖДУ КЛАССИЧЕСКИМИ И КВАНТОВЫМИ ВЫЧИСЛЕНИЯМИ

Остхеймер-Лабунец Е.В., Остхеймер Г.О, Лабунец В.Г., Гусев О.А.

Уральский государственный технический университет - УПИ

Известно, что каждое классическое ортогональное (унитарное) преобразование Фурье имеет две реализации: классическую (на классическом компьютере) и квантовую (на квантовом компьютере). В работе [1] мы показали, что каждое классическое преобразование Фурье генерирует истинно квантовое преобразование Фурье, которое также может иметь две реализации: классическую и квантовую. В настоящее время квантовую реализацию классического преобразования Фурье ошибочно называют квантовым преобразованием Фурье, так как. истинно квантовое преобразование Фурье отображает классические сигналы в квантовые. В этой работе мы рассматриваем классическую и квантовую реализации истинно квантового преобразования на циклической группе. Согласно работе [1], это квантовое преобразование Фурье задается выражением

$$\hat{f} = QU\{\mathrm{AW}[f](\nu,\tau)\} = \iint_{(\nu,\tau)\in\Omega^*\times\Omega} AW[f](\nu,\tau)E_x^{[\nu,\tau]}d\mu(\nu)d\mu(\tau),$$

где $AW[f]$ - функция неопределенности классического сигнала f, $E_x^{[\nu,\tau]} = \varphi_\nu^{1/2}\hat{M}_x^\nu\hat{T}_x^\tau$ - операторы Гейзенберга-Вейля (произведение модуляционных операторов $\hat{M}_x^\nu f(x) = \varphi_\nu(x)f(x)$ и операторов обобщенного сдвига $\left(\hat{T}_x^\tau f\right)(x) := f(x\oplus\tau)$) порождаемые ортнонормированным базисом $\{\varphi_\omega(x)\}_{\omega\in\Omega^*}$ в пространстве $\mathrm{L}(\Omega, A) := \{f(x)|f(x):\Omega\to A\}$ функций $f(x):\Omega\to A$, заданных на некотором множестве Ω и со значениями в алгебре A. В частности, если $\Omega = Z/p$ - конечная циклическая группа порядка *p* (*p* - простое) и $A = C$ – поле комплексных чисел, то квантовое преобразование Фурье определяется как

$$\hat{f} = QF\{\mathrm{AW}[f]\} = \sum_{\nu\in Z/p}\sum_{\tau\in Z/p} AW[f](\nu,\tau)E^{[\nu,\tau]} =$$

$$= \sum_{\nu\in Z/p}\sum_{\tau\in Z/p}\left(\mathrm{AW}[f](\nu,\tau)e^{\frac{\nu\tau}{2}}\begin{bmatrix}1 & & & & \\ & \varepsilon^1 & & & \\ & & \varepsilon^2 & & \\ & & & \dots & \\ & & & & \varepsilon^{p-1}\end{bmatrix}^\nu\begin{bmatrix}0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \dots & \dots & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0\end{bmatrix}^\tau\right),$$

Это преобразование отображает классический сигнал f в квантовый $\hat{f}$, т.е. осуществляет интерфейс между классическим и квантовым мирами. Оказывается, что это квантовое преобразование является частным случаем преобразования Фурье-Гейзенберга., Пусть: $HW(Z/p, Z/p, Z/p)$ $:= \left\{g(t,\omega,c) = \begin{bmatrix}1 & \omega & c \\ & 1 & t \\ & & 1\end{bmatrix}\middle| t,\omega,c\in Z/p\right\}$ - группа Гейзенберга над Z_p. Хорошо известно, что эта группа имеет p^2 одномерных представлений и $p-1$ p-мерных неприводимых представлений. Преобразование Фурье на этой группе имеет следующую форму для скалярно-значных и матрично-значных спектральных отсчетов:

$$F(\alpha_1,\alpha_2) = \sum_{t,\omega,c\in Z/p}\sum\sum f(t,\omega,c)\varepsilon_{\mathrm{p}}^{\alpha_1 t}\varepsilon_{\mathrm{p}}^{\alpha_2\omega},$$

$$\hat{F}_{p\times p}(\alpha_3)=\sum_{t,\omega,c}\sum_{\in}\sum_{Z/p} f(t,\omega,c)\varepsilon_{\mathrm{p}}^{\alpha_3 c}\begin{bmatrix}1 & & & & \\ & \varepsilon^1 & & & \\ & & \varepsilon^2 & & \\ & & & \ldots & \\ & & & & \varepsilon^{p-1}\end{bmatrix}^{\alpha_3\omega}\begin{bmatrix}0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ldots & & \\ & & & 0 & 1\\ 1 & & & & 0\end{bmatrix}^{t},$$

где $\varepsilon_p=\sqrt[p]{1}$.

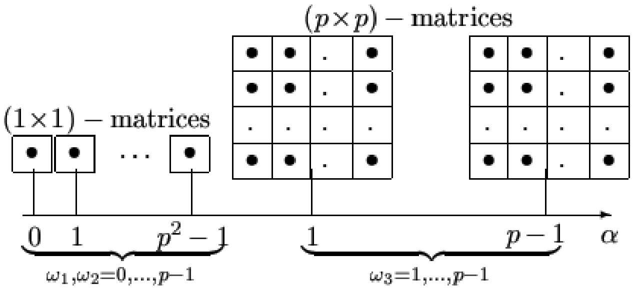

Рис.1: Скалярно- и матрично-значный спектр

Следовательно, каждый сигнал $f(t,\omega,c)\colon HW(Z/p,Z/p,Z/p)\to C$, определенный на группе Гейзенберга со значениями в поле комплексных чисел имеет p^2 комплексно-значных и $p-1$ $(p\times p)$-матрично-значных спектральных компонент (см. Рис. 1). С точки зрения квантовой механики, преобразование Фурье-Гейзенберга представляет собой $p-1$ различных квантовых преобразований Фурье (по одному для каждого $\alpha_3=1,2,\ldots p-1$).

Рассмотрим теперь матричное представление преобразования Фурье на группе Гейзенберга. Для этого столбы матрицы пронумеруем элементами группы, а строки – числами $n=t+\omega p+cp^2$. Тогда матрица FH преобразования Фурье-Гейзенберга может быть фактор-изована как $FHT=[I_{p^3-p^2}\oplus(I_p\otimes F_p)][I_p\otimes F_p\otimes I_p][F_p\otimes I_p\otimes I_p]$, что представляет собой выражение для быстрого преобразования, легко реализуемого на классическом компьютере, где F_p - обычное p-точечное дискретное преобразование Фурье. Аналогично выводится быстрое преобразование Фурье-Гейзенберга на группе $HW\big((Z/p)^n,(Z/p)^n,Z/p\big)$:

$$FHT=[I_{p^{3n}-p^{2n}}\oplus(I_{p^n}\otimes F_p^n)][I_p\otimes F_p^n\otimes I_{p^n}][F_p\otimes I_{p^n}\otimes I_{p^n}],$$

где $F_p^n:=F_p\otimes F_p\otimes\ldots\otimes F_p=\prod_{i=1}^{n}\Big[I_{p^{i-1}}\otimes F_p\otimes I_{p^{n-i}}\Big]$ - традиционное n-мерное дискретное преобразование Фурье. Кроме классической реализации преобразования Фурье-Гейзенберга имеют квантовую реализации. Все квантовые операции будем реализовывать на квантовом *p*-арном квантовом регистре QU-p^nREG($|\mathbf{q}\rangle$) := $\boxed{|q_1\rangle|q_2\rangle\cdots|q_n\rangle}$ состоящем из *n* квантовых *p*-арных триггеров. Для квантовой реализации мы введем следующие квантовые регистры:

1) входной составной квантовый регистр QU-p^{2n+1}InREG (см. Рис.2), состоящий из трех квантовых регистров: $\mathrm{QU}-p^n\,\mathrm{REG}(|\mathbf{t}\rangle)=\boxed{|t_1\rangle|t_2\rangle\cdots|t_n\rangle}$ - «временной» квантовый регистр, $\mathrm{QU}-p^n\,\mathrm{REG}(|\boldsymbol{\omega}\rangle)=\boxed{|\omega_1\rangle|\omega_2\rangle\cdots|\omega_n\rangle}$ - «частотный» квантовый регистр, $\mathrm{QU}-p^1\,\mathrm{REG}(|\mathrm{c}\rangle)=\boxed{|t_1\rangle}$ - «фазовый» квантовый триггер;

2) выходной составной квантовый регистр QU-p^{2n+1}OutREG, состоящий из трех квантовых α-регистров: $\mathrm{QU}-p^n\,\mathrm{REG}(|\boldsymbol{\alpha}_1\rangle)=\boxed{|\alpha_1^1\rangle|\alpha_2^1\rangle\cdots|\alpha_n^1\rangle}$, $\mathrm{QU}-p^n\,\mathrm{REG}(|\boldsymbol{\alpha}_2\rangle)=\boxed{|\alpha_1^2\rangle|\alpha_2^2\rangle\cdots|\alpha_n^2\rangle}$, $\mathrm{QU}-p^1\,\mathrm{REG}(|\boldsymbol{\alpha}_3\rangle)=\boxed{|\alpha_3\rangle}$

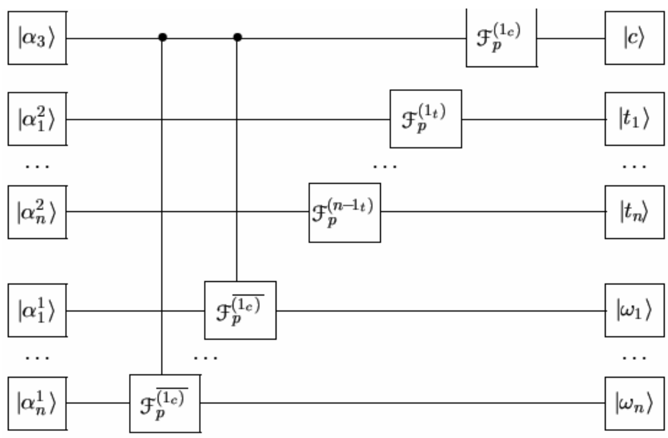

Рис. 2. Квантовая реализация сверхбыстрого преобразования Фурье-Гейзенберга

Из выражения для быстрого преобразования Фурье-Гейзенберга

$$FHT_{cl} = [I_{p^{3n}-p^{2n}} \oplus (I_{p^n} \otimes F_p^n)][I_p \otimes F_p^n \otimes I_{p^n}][F_p^n \otimes I_{p^n} \otimes I_{p^n}]$$

мы легко получаем сверхбыструю квантовую реализацию этого преобразования

$$FHT_{qu} = [\prod_{j_\omega=1}^{n} I_{p^{j_\omega-1}} \otimes F_p^{\overline{(1_c)}} \otimes I_{p^{n-j_\omega}}][I_p \otimes \prod_{i_t=1}^{n} F_p^{(i_t)} \otimes I_{p^n}][F_p^{(1_c)}].$$

На языке квантовый цепей это преобразование представлено на Рис.2. Мы видим что квантовая реализация использует $n+1$ локальных неуправляемых и n $\overline{(1,k)}$-управляемых цепей. Как результат, вычислительная сложность квантовой реализации равно $O(2n+1)$ при использовании $O(2n+1)$ квантовых цепей.

Литература

1. Лабунец В.Г., Остхеймер-Лабунец Е.В. Классическая и квантовая теории сигналов на абелевых группах и гипергруппах. Настоящий сборник.

FAST FOURIER-HEISENBERG TRANSFORM AS TRUE QUANTUM FOURIER TRANSFORM AND AS INTERFACE BETWEEN CLASSICAL AND QUANTUM SIGNALS

Ostheimer-Labunets E., Ostheimer E., Labunets V., Gusev O.

Urals State Technical Univesity –UPI

It is known that every classical orthogonal Fourier transform has two realization: classical (on classical computer) and quantum (on quantum computer). In [1] have been shown that every classical Fourier transform generates true quantum Fourier transform. This transform can has two realization too: classical (on classical computer) and quantum (on quantum computer). Quantum realization of classical Fourier transform is not quantum Fourier transform, because true quantum Fourier transform maps classical signals (function) on quntum signals (Hermitean operators). Classical Fourier transform maps classical signals to classical spectrum. So, classical Fourier transform (on classical or quantum computers) performs interface between signal and spectral domains but true quantum Fourier transform (on classical or quantum computers) performs interface classical and quantum signals.

In this work we develop classical and quantum realizations of true quantum Fourier transforms on a cyclic group and proof that this transform is a particular case of Fourier-Heisenberg transform on Heisenberg group $HW(Z/p, Z/p, Z/p)$. Fourier-Heisenberg transform has the following form for scalar-valued and matrix-valued spectral components::

$$F(\alpha_1,\alpha_2) = \sum_{t,\omega,c\in Z/p}\sum\sum f(t,\omega,c)\varepsilon_p^{\alpha_1 t}\varepsilon_p^{\alpha_2\omega},$$

$$\hat{F}_{p\times p}(\alpha_3)=\sum_{t,\omega,c}\sum_{\in}\sum_{Z/p} f(t,\omega,c)\varepsilon_p^{\alpha_3 c}\begin{bmatrix}1 & & & & \\ & \varepsilon^1 & & & \\ & & \varepsilon^2 & & \\ & & & \ldots & \\ & & & & \varepsilon^{p-1}\end{bmatrix}^{\alpha_3\omega}\begin{bmatrix}0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ldots & & \\ & & & 0 & 1 \\ 1 & & & & 0\end{bmatrix}^t,$$

where $\varepsilon_p=\sqrt[p]{1}$. Hence, every signal $f(t,\omega,c):\ HW(Z/p,Z/p,Z/p)\to C$ defined on Heisenberg group with values in complex field has p^2 complex-valued and $p-1$ $(p\times p)$- matrix-valued components. With quantum point of view, Fourier-Heisenberg transform is $p-1$ different (nonisomorhic) true quantum Fourier transforms (for every $\alpha_3=1,2,\ldots p-1)$. We proof that this transform has classical fast and superfast quantum realizations.

Bibliography

2. Labunets V.G., Ostheimer-Labunets E.V.. Classical and quantum signal theories on Abelian groups and hypergroups. In this proceedings.