КВАНТОВЫЙ МНОГОМАСШТАБНЫЙ АНАЛИЗ СИГНАЛОВ С ПОМОЩЬЮ БЫСТРОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ-ГЕЙЗЕНБЕРГА

ЛАБУНЕЦ В.Г., ОСТХЕЙМЕР-ЛАБУНЕЦ Е.В., ОСТХЕЙМЕР Г.О., ГУСЕВ О.А.

Уральский государственный технический университет - УПИ

Известно, что каждое классическое ортогональное (унитарное) преобразование Фурье имеет две реализации: классическую (на классическом компьютере) и квантовую (на квантовом компьютере). В работе [1] мы показали, что каждое классическое преобразование Фурье генерирует истинно квантовое преобразование Фурье, которое также может иметь две реализации: классическую и квантовую. В настоящее время квантовую реализацию классического преобразования Фурье ошибочно называют квантовым преобразованием Фурье. Истинно квантовое преобразование Фурье отображает классические сигналы в квантовые (Эрмитовы операторы). В этой работе мы показываем что преобразование Фурье-Гейзенберга реализует конечное множество истинно квантовых преобразований Фурье, отображающих классические сигналы в квантовые сигналы (Эрмитовы операторы) различной размерности, что дает многомасштабное квантовое представление классических сигналов.

Согласно работе [1] истинное квантовое преобразование Фурье задается выражением

$$\hat{f} = QU\{\mathrm{AW}[f](\nu,\tau)\} = \iint_{(\nu,\tau)\in\Omega^*\times\Omega} AW[f](\nu,\tau)E_x^{[\nu,\tau]}d\mu(\nu)d\mu(\tau),$$

где $AW[f]$- функция неопределенности классического сигнала, $E_x^{[\nu,\tau]} = \varphi_\nu^{1/2}\hat{M}_x^\nu\hat{T}_x^\tau$ - операторы Гейзенберга-Вейля в форме произведения модуляционных операторов $\hat{M}_x^\nu f(x) = \varphi_\nu(x)f(x)$ и операторов обобщенного сдвига $\left(\hat{T}_x^\tau f\right)(x) := f(x\oplus\tau)$, порождаемых ортнонормированным базисом $\{\varphi_\omega(x)\}_{\omega\in\Omega^*}$ в сигнальном пространстве $\mathbf{L}(\Omega,A) := \{f(x)|f(x):\Omega\to A\}$ функций $f(x):\Omega\to A$, заданных на некотором множестве Ω и со значениями в некоторой алгебре A. В частности, если $\Omega = Z/p$ - конечная циклическая группа порядка p (p - простое) и A = C – поле комплексных чисел, то квантовое преобразование Фурье определяется как

$$\hat{f}_{p\times p} = QF_{p\times p}\{\mathrm{AW}[f]\} = \sum_{\nu\in Z/p}\sum_{\tau\in Z/p} AW[f](\nu,\tau)E_{p\times p}^{[\nu,\tau]} =$$

$$= \sum_{\nu\in Z/p}\sum_{\tau\in Z/p}\left(\mathrm{AW}[f](\nu,\tau)e^{\frac{\nu\tau}{2}}\begin{bmatrix}1 & & & & \\ & \varepsilon^1 & & & \\ & & \varepsilon^2 & & \\ & & & \ldots & \\ & & & & \varepsilon^{p-1}\end{bmatrix}^\nu\begin{bmatrix}0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ldots & \ldots & \\ & & & 0 & 1\\ & & & & 0\end{bmatrix}^\tau\right).$$

Это преобразование (совместно с преобразованием Вудворда) отображает классический сигнал f в квантовый сигнал $\hat{f}$. Оно реализует интерфейс между классически и квантовым мирами. Оказывается, что подобные квантовые преобразования являются основными строительными блоками преобразования Фурье-Гейзенберга, которое отображает классический сигнал в совокупность квантовых сигналов различной размерности и принадлежащих различным неизоморфным квантовым мирам с различными постоянными Планка.

Пусть:

$$HW\left(Z/p^n, Z/p^n, Z/p\right) := \left\{g(t,\omega,c) = \begin{bmatrix}1 & \omega & c\\ & 1 & t\\ & & 1\end{bmatrix}\middle| t,\omega,c\in Z/p^n\right\}-$$

- группа Гейзенберга над кольцом Z/p^n, состоящая из верхнетреугольных (3×3)-матриц. Хорошо известно, что группа $HW\left(Z/p^n, Z/p^n, Z/p\right)$ имеет p^{2n} одномерных представлений и многомерных представлений размерностей $d_k = p^k$, $\mathrm{k} = 1,2,\ldots,\mathrm{n}$ (т.е. размерностей $p^1, p^2, \ldots, p^{\mathrm{n}}$). Это означает, что преобразование Фурье-Нейзенберга отображает классический сигнал в ряд квантовых сигналов размерностей $p^1 \times p^1, p^2 \times p^2, ..., p^n \times p^n$ (квантовый сигнал имеет форму Эрмитова оператора). Квантовых сигналов размерности $p^k \times p^k$ имеется ровно $p^{n-k}(p^n - p^{n-1})$, где $k = 1,2,...,n$.

Следовательно, каждый сигнал

$$f(t,\omega,c): HW\left(Z/p^n, Z/p^n, Z/p^n\right) \to C,$$

определенный на группе Гейзенберга со значениями в поле комплексных чисел имеет p^{2n} комплексно-значных и $p^{n-k}(p^n - p^{n-1})$ матрично-значных (размером $p^k \times p^k$) спектральных компонент.

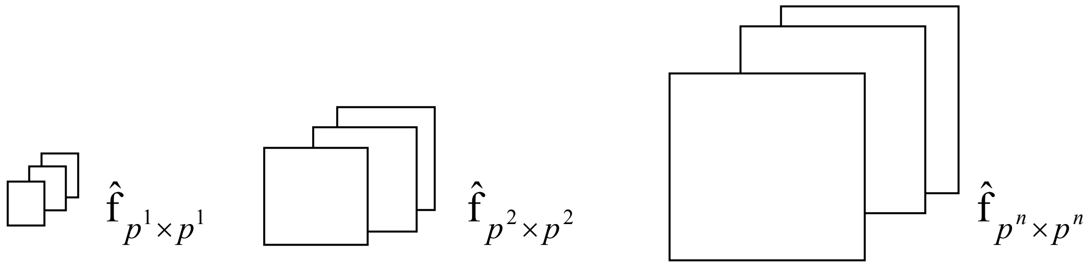
Преобразование Фурье-Гейзенберга на этой группе имеет $n+1$ выражений: одно для скалярно-значного спетра:

$$F(\alpha_1, \alpha_2) = \sum\sum_{t,\omega,c\ \in}\sum_{Z/p^n} f(t,\omega,c)\varepsilon_{p^n}^{\alpha_1 t}\varepsilon_{p^n}^{\alpha_2 \omega},$$

и $n+1$ матрично-значных

$$\hat{f}_{p^k \times p^k} = QF_{p^k \times p^k}\{\mathrm{AW}[f]\} = \sum_{\nu \in Z/p^k}\sum_{\tau \in Z/p^k} AW[f](\nu,\tau)E_{p^k \times p^k}^{[\nu,\tau]}$$, где $\varepsilon_{p^k} = \sqrt[p^k]{1}$, $k = 1,2,...,n$.

С точки зрения квантовой механики преобразование Фурье-Гейзенберга представляет собой $p^{3n} - p^{2n}$ различных квантовых преобразований Фурье, каждое из которых отображает классический сигнал в в квантовый сигнал вполне определенной размерности:



$p^{n-1}(p^n - p^{n-1})$ квантовых сигналов $p^{n-2}(p^n - p^{n-1})$ квантовых сигналов . . . $p^0(p^n - p^{n-1})$ квантовых сигналов

Мы доказываем, что это преобразование имеет классическую реализацию в форме классического быстрого алгоритма и квантовую реализацию в форме квантового супербыстрого алгоритма.

Литература

1. Лабунец В.Г., Остхеймер-Лабунец Е.В. Классическая и квантовая теории сигналов на абелевых группах и гипергруппах. Настоящий сборник.

2. Лабунец В.Г., Остхеймер-Лабунец Е.В., Остхеймер Г.О., Гусев О.А. Быстрое преобразование Фурье-Гейзенберга в качестве истинного квантового преобразования Фурье и интерфейса между классическими и квантовыми выфчислениями. В настоящем сборнике.

SIGNAL MULTIRESOLUTION QUANTUM ANALYSIS VIA FAST FOURIER-HEISENBERG TRANSFORM

OSTHEIMER E., LABUNETS V., GUSEV O.
Urals State Technical Univesity –UPI

It is known that every classical orthogonal Fourier transform has two realization: classical (on classical computer) and quantum (on quantum computer). In [1] have been shown that every classical Fourier transform generates true quantum Fourier transform. This transform can has two realization too: classical (on classical computer) and quantum (on quantum computer). Quantum realization of classical Fourier transform is not quantum Fourier transform, because true quantum Fourier transform maps classical signals (function) on quntum signals (Hermitean operators). Classical Fourier transform maps classical signals to classical spectrum. So, classical Fourier transform (on classical and quantum computers) performs interface between signal and spectral domains but true quantum Fourier transform (on classical and quantum computers) performs interface classical and quantum signals.

According to [1] true quantum Fourier transform is defined as

$$\hat{f} = QU\{\mathrm{AW}[f](\nu,\tau)\} = \iint_{(\nu,\tau)\in\Omega^*\times\Omega} AW[f](\nu,\tau)E_x^{[\nu,\tau]}d\mu(\nu)d\mu(\tau),$$

where $E_x^{[\nu,\tau]} = \varphi_\nu^{1/2} \hat{M}_x^\nu \hat{T}_x^\tau$ - the Heisenberg-Weyl operators written in the form the product of modulation operators and $\hat{M}_x^\nu f(x) = \varphi_\nu(x) f(x)$ anf generalized shift operators $\left(\hat{T}_x^\tau f\right)(x) := f(x \oplus \tau)$, generated by an orthonormal basis $\{\varphi_\omega(x)\}_{\omega\in\Omega^*}$ of the signal space $\mathbf{Sig}_0 = \mathrm{L}(\Omega, A) := \{f(x) | f(x) : \Omega \to A\}$ of functions $f(x) : \Omega \to A$, defined on a set Ω with values in an algebra A. In particular, if $\Omega = Z/p$ -is finite cyclic group (p is a prime) и A = C is the complex field then true quantum Fourier transform is defined as

$$\hat{f}_{p\times p} = QF_{p\times p}\{\mathrm{AW}[f]\} = \sum_{\nu\in Z/p} \sum_{\tau\in Z/p} AW[f](\mathrm{v}, \tau) E_{p\times p}^{[\nu,\tau]} .$$

If $\Omega = Z/p^n$ -is a cyclic group of the order p^n then in this case we obtain a wide family of true quantum Fourier transforms. They map a classical signal to a family of quantum signals (operators) with different dimensions:

$$\hat{f}_{p^k\times p^k} = QF_{p^k\times p^k}\{\mathrm{AW}[f]\} = \sum_{\nu\in Z/p} \sum_{\tau\in Z/p} AW[f](\mathrm{v}, \tau) E_{p^k\times p^k}^{[\nu,\tau]} ,$$

where $k = 1,2,...,n$. This means that Fourier-Heisenberg transform map the classical signal to a set of quantum signals with dimensions $p^1 \times p^1, p^2 \times p^2, ..., p^n \times p^n$ and, therefore, represents multiresolution quantum analysis of classical signals.

Bibliography

1. Labunets V.G., Ostheimer-Labunets E.V.. Classical and quantum signal theories on Abelian groups and hypergroups. In this proceedings.
2. Ostheimer-Labunets E. V., Ostheimer E. V., Labunets V.G.., Gusev O.A. Fast Fourier-Heisenberg transform as true quantum Fourier transform and as interface between classical and quantum. In this proceedings