КЛАССИЧЕСКАЯ И КВАНТОВАЯ ТЕОРИИ СИГНАЛОВ НА АБЕЛЕВЫХ ГРУППАХ И ГИПЕРГРУППАХ

ЛАБУНЕЦ В.Г., ОСТХЕЙМЕР Е.В.

Уральский государственный технический университет - УПИ

В этой работе мы разрабатываем обобщенный (негармонический) классический и квантовый анализы сигналов, ассоциированные с произвольными унитарными преобразованиями. Мы вводим понятия обобщенной классической и квантовой сверток и корреляций, обобщенных классических и квантовых распределений Вигнера-Вилле. Все теоремы и свойства традиционного классического гармонического анализа Фурье переносятся на обобщенный классический и квантовый анализы. Мы изучаем обобщенные квантовые свертки и корреляции квантовых сигналов и спектров $\hat{f}, \hat{F}$. Пусть $f(x):\Omega\to A$ будет A-значным сигналом, где A произвольная алгебра. Обычно $\Omega=\mathbf{R}^n\times\mathbf{T}$, или $\Omega=\mathbf{Z}^n\times\mathbf{T}$, где $\mathbf{R}^n$, Z^n and $\mathbf{Z}_N^n$ are n-мерные пространства над **R**, **Z** and $\mathbf{Z}_N$, соответственно, **T** – компактное (временное) подмножество **R**, **Z**, или $\mathbf{Z}_N$. Здесь, **R**, **Z** и $\mathbf{Z}_N$ полн реальных чисел, кольцо целых и кольцо целых по модулю N, соответственно. Пусть Ω^* дуальное к Ω пространство. Обычно Ω и Ω^* называются временной и спектральной областями. Здесь мы сохраняем за переменной $x\in\Omega$ термин «время» и за $\omega\in\Omega^*$ термин «частота». Пусть

$$\mathbf{ClSig}_0=\mathrm{L}(\Omega,A):=\left\{f(x)\middle|f(x):\Omega\to A\right\},\ \mathbf{ClSp}_0=\mathrm{L}(\Omega^*,A):=\left\{F(\omega)\middle|F(\omega):\Omega^*\to A\right\}$$

два векторных пространства (сигнальное и спектральное) A-значных функций и $\{\varphi_\omega(x)\}_{\omega\in\omega^*}$ - произвольная ортонормированная система функций в $\mathbf{ClSig}_0$. Тогда для каждого сигнала $f(x)\in\mathbf{ClSig}_0$ существует такой спектр $F(\omega)\in\mathbf{ClSp}_0$, что

$$F(\omega)=CU\{f\}(\omega)=\int_{x\in\Omega}f(x)\overline{\varphi}_\omega(x)d\mu(x),\qquad f(x)=CU^{-1}\{F\}(x)=\int_{x\in\Omega^*}F(\omega)\varphi_\omega(x)d\mu(\omega).$$

Эти два выражения называются обобщенными классическими *CU*-преобразованиями Фурье. Каждое классическое *CU*-преобразованиями Фурье имеет две реализации: классическую (на классическом компьютере) и квантовую (на квантовом компьютере). В дальнейшем мы покажем, что каждое классическое *CU*-преобразование Фурье генерируют истинно квантовое *QU*-преобразование Фурье, которое также может иметь две реализации: классическую и квантовую. В настоящее время квантовую реализацию классического преобразования Фурье ошибочно называют квантовым преобразованием Фурье. Квантовое *QU*-преобразование Фурье отображает классическую теорию сигналов в квантовую теорию сигналов.

Главными строительными элементами классической и квантовой теории являются операторы обобщенного сдвига и обобщенные модуляционные операторы. Для традиционных сдвигов во временной и частотной областях $\left(\hat{T}_x^\tau f\right)(x):=f(x+\tau)$, $\left(\hat{D}_{\omega F}^\nu\right)(\omega):=f(\omega+\nu)$ а также для модуляционных операторов мы имеем

$$\hat{T}_x^\tau e^{j\omega x}=e^{j\omega(x+\tau)}=e^{j\omega x}e^{j\omega\tau},\ \text{и}\ \hat{D}_\omega^\nu e^{j\omega x}=e^{j(\omega+\nu)x}=e^{j\omega x}e^{j\omega\nu},$$

$$\hat{M}_x^\nu f(x)=e^{j\nu x}f(x)\ \text{и}\ \hat{M}_\omega^\tau F(\omega)=e^{j\omega\tau}F(\omega).$$

т.е. гармонические сигналы являются собственными функциями традиционных операторов сдвига.

По образу и подобию мы вводим операторы обобщенного сдвига (ООС) и обобщенные модуляционные операторы

$$\left(\hat{T}_x^\tau f\right)(x):=f(x\hat{+}\tau),\ \left(\hat{D}_{\omega F}^\nu\right)(\omega):=f(\omega\tilde{+}\nu),\ \text{где}$$

$$\left(\hat{T}_x^\tau\varphi_\omega\right)(x):=\varphi_\omega(x\hat{+}\tau):=\varphi_\omega(x)\varphi_\omega(\tau)\ \text{и}\ \left(\hat{D}_{\omega\varphi_\omega}^\nu\right)(x):=\varphi_{\omega\tilde{\oplus}\nu}(x):=\varphi_\omega(x)\varphi_\nu(\nu),$$

$$\hat{M}_x^\nu f(x)=\varphi_\nu(x)f(x)\ \text{и}\ \hat{M}_\omega^\tau F(\omega)=\varphi_\omega(\tau)F(\omega).$$

Множество всех операторов обобщенного сдвига согласно Левитану [1] формируют Абелеву гипергруппу. Введенные операторы индуцируют сигнальные и спектральные Гейзенберг-Вейль некоммутативные гипергруппы

$$HW_x := \{E_x^{[\nu,\tau]} = \varphi_\nu^{1/2}\hat{M}_x^{\nu}\hat{T}_x^{\tau}\}_{(\nu,\tau)\in\Omega^*\times\Omega}, \qquad HW_\omega := \{E_\omega^{[\tau,\nu]} = \overline{\varphi}_\nu^{1/2}\hat{M}_\omega^{\tau}\hat{D}_x^{\nu}\}_{(\tau,\nu)\in\Omega\times\Omega^*}.$$

Очевидно, $y(\nu,\tau) = \left\langle E_x^{[\nu,\tau]}g(x) \mid f(x)\right\rangle$ и $Y(\tau,\nu) = \left\langle E_\omega^{[\tau,\nu]}G(\omega) \mid F(\omega)\right\rangle$ обобщенные преобразование Габора в сигнальной и спектральной областях (Гейзенберг-Вейля фреймы).

Хорошо известно, что стационарные линейные динамические системы описываются свертками. Используя ООС можно ввести обобщенные свертки и корреляции. Следующие выражения

$$y(x) := (h \Diamond f)(x) = \int_{\upsilon\in\Omega} h(\tau) f(x \hat{-} \tau)\, d\mu(\tau), \quad Y(\omega) := (H \heartsuit F)(\omega) = \int_{\nu\in\Omega} H(\nu) F(\omega \simeq \nu)\, d\mu(\nu)$$

$$(f \clubsuit_\theta g)(\tau \mid \theta) = \int_{x\in\Omega} f(x)\overline{g}(x \hat{-} \tau)\, d\mu(x), \quad (F \spadesuit G)(\nu) := \int_{\omega\in\Omega^*} F(\omega)\overline{G}(\omega \simeq \nu)\, d\mu(\omega)$$

называются обобщенными $\Diamond$-и $\heartsuit$-*свертками* и $\clubsuit$- *и* $\spadesuit$-*кросскорреляциями.* Обобщенные свертки и корреляции имеют много общих с традиционной сверткой и корреляцией свойств В частности, имеет место следующая

Теорема 1. *U*-преобразованиями Фурье отображает $\Diamond$-и $\heartsuit$-свертки и $\clubsuit$- и $\spadesuit$-кросскорреляци в произведния спектров и сигналов

$$U\{h \Diamond f\} = U\{h\}(\omega)U\{f\} = H(\omega)F(\omega), \; U^{-1}\{H\heartsuit F\} = U^{-1}\{H\}U^{-1}\{G\} = h(x)g(x),$$

$$U\{f \clubsuit g\} = U\{f\}U\overline{\{g\}} = F(\omega)\overline{G}(\omega), \; U^{-1}\{F\spadesuit G\} = U^{-1}\{F\}U^{-1}\{G\} = f(x)\overline{g}(x).$$

Наряду с сигналами и спектрами, рассмотрим обобщенные симметричные время-частотные распределения в форме функций неопределенности сигналов и спектров

$$\mathrm{AW}[f,g](\nu,\tau) = \underset{\tau\leftarrow x}{U}\left\{f\left(x \hat{+} \frac{\tau}{2}\right)\overline{g}\left(x \hat{-} \frac{\tau}{2}\right)\right\} = \underset{\upsilon\leftarrow x}{U}\left\{f\overline{g}^{s}\right\},$$

$$\mathrm{AW}[F,G](\tau,\nu) = \underset{\nu\leftarrow\omega}{U^{-1}}\left\{F\left(\omega \hat{+} \frac{\nu}{2}\right)\overline{G}\left(\omega \hat{-} \frac{\nu}{2}\right)\right\} = \underset{\upsilon\leftarrow x}{U^{-1}}\left\{F\overline{G}^{s}\right\}.$$

Главными объектами квантовой теории сигналов являются квантовые сигналы и спектры $\hat{f}, \hat{F}$. В соответствии с основными представлениями квантовой механики квантовые сигналы и спектры – не функции, а Эрмитовы операторы, ассоциированные с классическими сигналами и спектрами f, F. Переход от классических объектов к квантовым осуществляется процедурой квантизации в соответствии со следующими правилами квантизации Вейля **WQ**:

$$\mathbf{WQ}: f \to \mathrm{AW}[f] \to \hat{f}, \; \mathbf{WQ}: F \to \mathrm{AW}[F] \to \hat{F}.$$

Для получения квантовых сигналов и спектров из классических версий необходимо получить время-частотные представления сигналов и спектров в виде функций неопределенности, а затем на них подействовать так называемым истинным квантовым преобразованием Фурье QU:

$$\hat{f} = QU\{\mathrm{AW}[f](\nu,\tau)\} = \iint_{(\nu,\tau)\in\Omega^*\times\Omega} AW[f](\nu,\tau)E_x^{[\nu,\tau]}d\mu(\nu)d\mu(\tau), \; \hat{F} = QU^{-1}\{\mathrm{AW}[F](\tau,\nu)\}$$

$$= \iint_{(\tau,\nu)\in\Omega\times\Omega^*} AW[F](\tau,\nu)E_x^{[\tau,\nu]}d\mu(\tau)d\mu(\nu).$$

Пусть $\hat{f} = QU\{\mathrm{AW}[f](\nu,\tau)\}$, $\hat{g} = QU\{\mathrm{AW}[g](\nu,\tau)\}$ и $\hat{F} = QU^{-1}\{\mathrm{AW}[F](\tau,\nu)\}$, $\hat{G} = QU^{-1}\{\mathrm{AW}[G](\tau,\nu)\}$ - две пары сигналов и спектров. Тогда для двух произведений $\hat{f}\hat{g}$ и $\hat{F}\hat{G}$ мы имеем

$$\hat{f}\hat{g} = QU\{\mathrm{AW}[f] *_{Qu} \mathrm{AW}[g]\}, \;\; \hat{F}\hat{G} = QU^{-1}\{\mathrm{AW}[F(\omega)]\; _{Qu}\mathrm{AW}[G(\omega)]\}$$

где выражения

$$\left(AW_\theta[f] *_{Qu} \mathrm{AW}[g]\right)(\omega,x) =$$

$$= \int\limits_{(\nu,\tau)} \left(AW[f](\nu,\tau) AW[g]\right)(\omega-\nu, x-\tau)\overline{\varphi}_{\omega}^{1/2}(\tau)\varphi_{\nu}^{1/2}(x)d\mu(\nu)d\mu(\tau),$$

$$\left(AW[F]\ _{Qu} AW[G]\right)(x,\omega) :=$$

$$= \int\limits_{(\nu,\tau)} \left(AW[F](\tau,\nu) AW[G]\right)(x-\tau, \omega-\nu)\overline{\varphi}_{\omega}^{1/2}(\tau)\varphi_{\nu}^{1/2}(x)d\mu(\tau)d\mu(\nu)$$

называются обобщенными квантовыми свертками функций неопределенности.

Литература

1. Levitan, B.M. (1964). Generalized translation operators. *Israel Program for Scientific Translations*, Jerusalem, 120 p.

2. Labunets, E., Astola, L., Labunets, V.G., Astola, J., and Egiazarian, K., (2000)) Nonlinear signal solitary, *Proc. of SPIE Nonlinear Image Processing XI,* 2000, Vol. 3961

CLASSICAL AND QUANTUM SIGNAL THEORY ON ABELIAN GROUPS AND HYPERGROUPS

LABUNETS V., OSTHEIMER-LABUNETS E.

Urals State Technical Universitu-UPI

In this work we develop generalized (nonharmonic) classical and quantum analysis, associated with an arbitrary unitary transforms. We introduce generalized classical and quantum convolutions and correlations, time-frequency distributions. We proof all theorems of classical Fourier analysis on generalized classical and quantum Fouriert analysis associated with with an arbitrary unitary transforms.

Let $F(\omega) = \int_{x\in\Omega} f(x)\overline{\varphi}_{\omega}(x)d\mu(x)$, $f(x) = \int_{x\in\Omega^*} F(\omega)\varphi_{\omega}(x)d\mu(\omega)$ are direct and inverse Fourier transform in an arbitrary basis. Generalized modulation operators and generalized shift operators in signal and spectral domains are associated with this basis as -:

$\hat{M}_x^{\nu} f(x) = \varphi_{\nu}(x) f(x)$ $\hat{M}_{\omega}^{\tau} F(\omega) = \varphi_{\omega}(\tau)F(\omega)$, $\left(\hat{T}_x^{\tau} f\right)(x) := f(x \hat{+} \tau)$, $\left(\hat{D}_{\omega F}^{\nu}\right)(\omega) := f(\omega \tilde{\mp} \nu)$.

Then we construct elementary quantum signals (Heisenberg-Weyl operators)

$E_x^{[\nu,\tau]} = \varphi_{\nu}^{1/2}\hat{M}_x^{\nu}\hat{T}_x^{\tau}$, $E_{\omega}^{[\tau,\nu]} = \overline{\varphi}_{\nu}^{1/2}\hat{M}_{\omega}^{\tau}\hat{D}_x^{\nu}$.

Obviously, $y(\nu,\tau) = \left\langle E_x^{[\nu,\tau]} g(x) \mid f(x)\right\rangle$ and $Y(\tau,\nu) = \left\langle E_{\omega}^{[\tau,\nu]} G(\omega) \mid F(\omega)\right\rangle$ are generalized Gabor transforms (Heisenberg-Weyl frames) and .

$$y(x) := \left(h \Diamond f\right)(x) = \int\limits_{\upsilon\in\Omega} h(\tau) f\left(x \hat{-} \tau\right) d\mu(\tau),\quad Y(\omega) := \left(H \heartsuit F\right)(\omega) = \int\limits_{\nu\in\Omega} H(\nu) F(\omega \tilde{-} \nu)\, d\mu(\nu)$$

$$\left(f \clubsuit_{\theta} g\right)(\tau \mid \theta) = \int\limits_{x\in\Omega} f(x)\overline{g}\left(x \hat{-} \tau\right) d\mu(x),\quad \left(F \spadesuit G\right)(\nu) := \int\limits_{\omega\in\Omega^*} F(\omega)\overline{G}(\omega \tilde{-} \nu)\, d\,\mu(\omega)$$

are generalized $\Diamond$-and $\heartsuit$ *-convolutions and* $\clubsuit$ *- u* $\spadesuit$-cross-corelations. Generalized convolutions and correlations have the same properties as ordinary convolutions and correlations.

General objects of quantum signal theory are quantum signals and $\hat{f}, \hat{F}$. The Weyl quantization procedure maps classical signals to quantum signal according to **WQ**: $\mathbf{WQ}: f \to \mathrm{AW}[f] \to \hat{f}$, $\mathbf{WQ}: F \to \mathrm{AW}[F] \to \hat{F}$, where $f \to \mathrm{AW}[f], : F \to \mathrm{AW}[F]$ are ambiguity functions for signal and spectrum, respectively. Then we have to map these function on quantum signal and spectrum using so called true quantum Fourier transform. We construct quantum convolutions and correlations of quantum signals and quantum spectra.

Литература

1. Labunets, E., Astola, L., Labunets, V.G., Astola, J., and Egiazarian, K., (2000)) Nonlinear signal solitary, *Proc. of SPIE Nonlinear Image Processing XI,* 2000, Vol. 3961