ЦИКЛИЧЕСКИЕ МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ВЕЙВЛЕТ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ: КАК МНОГО СУЩЕСТВУЕТ ОПТИМАЛЬНЫХ С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ СЖАТИЯ ДАННЫХ ВЕЙВЛЕТ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ?

Лебедев С.А., Лабунец В.Г., Гусев О.А., Остхеймер-Лабунец Е.В.

Уральский государственный политехнический университет-УПИ

Пусть $h_0 h_1 ... h_{2D-1} = \mathbf{h}$, $g_0 g_1 ... g_{2D-1} = \mathbf{g}$ - два набора коэффициентов длиной $2D$. Пусть $m = \left]\log_2 2D\right[$ - такое наименьшее целое число, что $2^{m-1} \le 2D \le 2^m$. Далее будем предполагать, что $2D = 2^m$. Построим ортогональное циклическое вейвлет преобразование в первой канонической форме:

$$WT_{2^n}\begin{bmatrix}\mathbf{h}\\ \mathbf{g}\end{bmatrix} = \prod_{i=0}^{n-m}\left[AWT_{2^{n-i}}\begin{bmatrix}\mathbf{h}\\ \mathbf{g}\end{bmatrix} \oplus \mathrm{I}_{2^n - 2^{n-i}}\right],$$

где при $i = n - m$ получается атомарная вейвлет матрица лестничного типа минимального $(2^m \times 2^m)$-размера. Остальные атомарные матрицы $AWT_{2^{m+1}}\begin{bmatrix}\mathbf{h}\\ \mathbf{g}\end{bmatrix}$, $AWT_{2^{m+2}}\begin{bmatrix}\mathbf{h}\\ \mathbf{g}\end{bmatrix}$, …, $AWT_{2^n}\begin{bmatrix}\mathbf{h}\\ \mathbf{g}\end{bmatrix}$ строятся достаточно просто: увеличивается размер матрицы вдвое, а коэффициенты $h_0 h_1 h_2 ... h_{2D-1}$ и $g_0 g_1 g_2 ... g_{2D-1}$ циклически сдвигаются с шагом 2. Шаг величиной 2 определяет название такого типа преобразования: диадические или 2-адические. Пусть $\left[\begin{array}{cc|cc|c|cc} h_0 & h_1 & h_2 & h_3 & \cdots & h_{2D-2} & h_{2D-1}\\ g_0 & g_1 & g_2 & g_3 & \cdots & g_{2D-2} & g_{2D-1}\end{array}\right] = \left[A_0 \mid A_1 \mid \ldots \mid A_{D-1}\right]$ - последовательность из D (2x2)-матриц A_i $(i = 0,1,...,D-1)$. Тогда вторая каноническая форма записывается как

$$WT_{2^n}[A_0, A_1, ..., A_{D-1}] = \prod_{i=0}^{n-1}\left[CYCL_{2^i}[A_0, A_1, ..., A_{D-1}] \oplus I_{2^n - 2^{n-i}}\right]$$

где $CYCL_{2^i}[A_0, A_1, ..., A_{D-1}]$ – циклическая матрица, компонентами которой являются (2x2)-матрицы A_i $(i = 0,1,...,D-1)$. Матрица $CYCL_{2^i}[A_0, A_1, ..., A_{D-1}]$ блочно диагонализируется преобразованием Зака $Z_{2^{kn}} = F_{2^{n-1}} \otimes I_2$:

$$Z_{2^k} \bullet CYCL_{2^k}[A_0, A_1, ..., A_{D-1}] \bullet Z_{2^k}^{-1} = Diag\{\hat{A}_0, \hat{A}_1, \hat{A}_2, ..., \hat{A}_{2^k-1}\},$$

где последовательность матриц $\hat{A}_0, \hat{A}_1, \hat{A}_2, ..., \hat{A}_{2^k-1}$ представляет собой преобразование Зака последовательности $A_0, A_1, ..., A_{D-1}$. Так как исходное вейвлет преобразование является ортогональным, а преобразование Зака – унитарным, то и полученный результат в виде блочно-диагональной матрицы, должен быть унитарной матрицей. А это возможно только в том случае, когда каждая подматрица – унитарна. Так как все они имею размер 2x2, то все они принадлежат унитарной группе U_2 и поэтому имеют трехпараметрическое представление.

$$\hat{A}(\alpha_k,\varphi_k,\beta_k)=\left[\begin{array}{c|c} +e^{i(\alpha_k+\beta_k)}\cos\varphi_k & +e^{i(\alpha_k-\beta_k)}\sin\varphi_k \\ \hline -e^{-i(\alpha_k-\beta_k)}in\varphi_k & +e^{-i(\alpha_k+\beta_k)}os\varphi_k \end{array}\right]=$$

$$=\left[\begin{array}{c|c} e^{i\alpha_k} & \\ \hline & e^{-i\alpha_k} \end{array}\right]\cdot\left[\begin{array}{c|c} +\cos\varphi_k & +\sin\varphi_k \\ \hline -\sin\varphi_k & +\cos\varphi_k \end{array}\right]\cdot\left[\begin{array}{c|c} e^{i\beta_k} & \\ \hline & e^{-i\beta_k} \end{array}\right],$$

где $\alpha_k,\varphi_k,\beta_k$ - углы Эйлера (или Крылова).

Для выявления компрессионных характеристик многопараметрических ортогональных вейвлет-преобразований поставлены следующие эксперименты:

1. Нахождение зависимости минимально достигаемой энтропии коэффициентов спектра изображения от числа и значения параметров преобразования D.
2. Нахождение зависимости числа оптимальных преобразований (на которых достигается минимум энтропии) от величины D.

В силу того, что поставленная задача решается фактически методом полного перебора и с ростом числа параметров D вычислительная сложность значительно возрастают, эксперименты проводились на одном изображении для множества значений $D\in\{2,3,4,5\}$. В качестве тестового выбрано серое изображение LENA. На последующих рисунках представлены зависимости энтропии коэффициентов изображения при изменении параметров вейвлет преобразований

1. Случай D=2. Полный перебор в области значений углов-параметров. График зависимости энтропии спектра при разных значениях параметра приведен на Рис. 1.

Из Рис.1 видно, что зависимость обладает четырьмя минимумами. Минимальное значение энтропии равно $IntEntropy = 5.2071$.

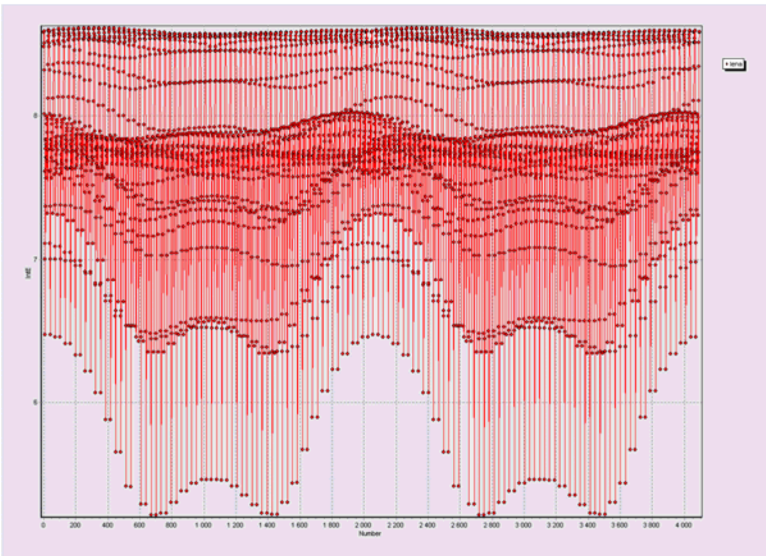

Рис.1. Зависимость энтропии спектра при различных значениях параметров ($m=6$, $D=2$)

2. Случай D=3. Полный перебор в области значений углов-параметров. График зависимости энтропии спектра при разных значениях параметра приведен на Рис. 2.

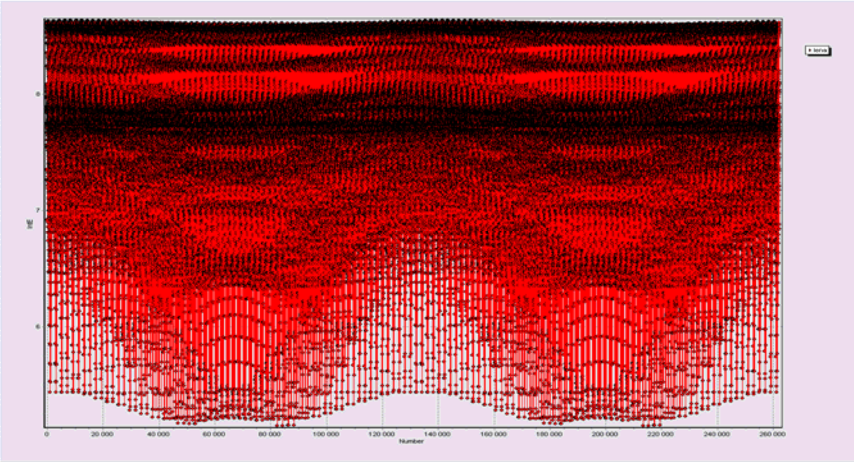

Рис.2. Зависимость энтропии спектра при различных значениях параметров ($m = 6$, $D = 3$)

Глобальные минимумы достигаются также в восьми точках: В этих точка энтропия спектра равна $IntEntropy = 5.1515$.

3. Случай D=3. Полный перебор в области значений углов-параметров. График зависимости энтропии спектра при разных значениях параметра приведен на Рис. 3.

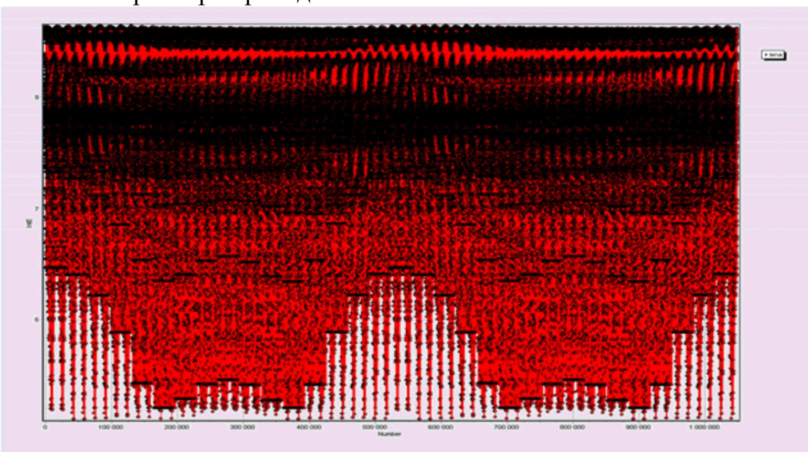

Рис.3. Зависимость энтропии спектра при различных значениях параметров ($m = 6$, $D = 4$)

Минимумы на данной сетке достигаются в шестнадцати точках. В этих точка энтропия спектра достигает величины $IntEntropy = 5.1143$.

Полученные результаты позволяют сделать вывод о том, что среди вейвлет преобразова-ний заданного размера существуют достаточно большое количество конкретных преобразований оптимальных с точки зрения сжатия данных. Дальнейшая оптимизация позволяет выбрать среди них те, которые имеют наиболее подходящие значения коэффициентов с точки зрения минимизации вычислительных затрат.

CYCLIC MANYPAMETRIC WAVELE TRANSFORMS: HOW MANY ARE THERE OPTIMAL (WITH IMAGE COMPRESSION POINT OF WIEV) WAVELET TRANSFORM?

Lebedev S., Unzhakov S., Labunes V., Gusev O., Ostheimer-Labunets E.

Urals State Technical University - UPI

Let $h_0 h_1 ... h_{2D-1} = \mathbf{h}$, $g_0 g_1 ... g_{2D-1} = \mathbf{g}$ be two sets of coefficients, where $m = \left]\log_2 2D\right[$ is such number that $2^{m-1} \le 2D \le 2^m$. It is known that fast wavelet transform is the product of the following sparse matrices

$$WT_{2^n}\begin{bmatrix}\mathbf{h}\\ \mathbf{g}\end{bmatrix} = \prod_{i=0}^{n-m}\left[AWT_{2^{n-i}}\begin{bmatrix}\mathbf{h}\\ \mathbf{g}\end{bmatrix} \oplus \mathrm{I}_{2^n - 2^{n-i}}\right],$$

where for $i = n - m$ we have elementary atomic wavelet $(2^m \times 2^m)$-matrix. The rest atomic matrices $AWT_{2^{m+1}}\begin{bmatrix}\mathbf{h}\\ \mathbf{g}\end{bmatrix}$, $AWT_{2^{m+2}}\begin{bmatrix}\mathbf{h}\\ \mathbf{g}\end{bmatrix}$, …, $AWT_{2^n}\begin{bmatrix}\mathbf{h}\\ \mathbf{g}\end{bmatrix}$ are constructed by the following way: we take matrix of twice size and cyclic translate the coefficients $h_0 h_1 h_2 ... h_{2D-1}$ and $g_0 g_1 g_2 ... g_{2D-1}$ on step 2. This step determines the name of wavelet transform – dyadic wavelet transform. Two sets of coefficients we can represent as a set of (2x2)- matrices:

$$\left[\begin{array}{cc|cc|c|cc} h_0 & h_1 & h_2 & h_3 & \cdots & h_{2D-2} & h_{2D-1} \\ g_0 & g_1 & g_2 & g_3 & \cdots & g_{2D-2} & g_{2D-1} \end{array}\right] = [A_0 \mid A_1 \mid \ldots \mid A_{D-1}].$$

As result we obtain new representation of wavelet transform in the form of product of cyclic matrices:

$$WT_{2^n}[A_0, A_1, \ldots, A_{D-1}] = \prod_{k=0}^{n-1} \left[CYCL_{2^k}[A_0, A_1, \ldots, A_{D-1}] \oplus I_{2^n - 2^{n-k}}\right].$$

Every such matrix is block-diagonalized by Zak transform

$$Z_{2^k} \bullet CYCL_{2^k}[A_0, A_1, \ldots, A_{D-1}] \bullet Z_{2^k}^{-1} = Diag\{\hat{A}_0, \hat{A}_1, \hat{A}_2, \ldots, \hat{A}_{2^k-1}\}.$$

Every transformed matrix

$$\hat{A}(\alpha_k, \varphi_k, \beta_k) = \left[\begin{array}{c|c} +e^{i(\alpha_k+\beta_k)}\cos\varphi_k & +e^{i(\alpha_k-\beta_k)}\sin\varphi_k \\ \hline -e^{-i(\alpha_k-\beta_k)}in\varphi_k & +e^{-i(\alpha_k+\beta_k)}os\varphi_k \end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} e^{i\alpha_k} & \\ \hline & e^{-i\alpha_k} \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} +\cos\varphi_k & +\sin\varphi_k \\ \hline -\sin\varphi_k & +\cos\varphi_k \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} e^{i\beta_k} & \\ \hline & e^{-i\beta_k} \end{array}\right],$$

has three-parametric representation, where $\alpha_k, \varphi_k, \beta_k$ are Euler angles. As result we obtain manyparametric representation of the wavelet transform $WT_{2^n}\begin{bmatrix}\boldsymbol{h}\\ \boldsymbol{g}\end{bmatrix}$. In this work we find optimal values of parameters for which spectral wavelet coefficients have minimal entropy. Obviously, wavelet transform with optimal parameters have maximal value of coefficient ratio. Experiments show that there are several global optimal values with different computer complexities. Wavelet transform with minimal computer complexity and maximal coefficient ratio is the best wavelet transform for image compression.