ЗАО «АВТЭКС СПб» zuk@autex.spb.ru 567-72-02

ЯВЛЯЕТСЯ ЛИ НЕГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЭРМИТА БОЛЕЕ ФУНДАМЕТАЛЬНЫМ ЧЕМ ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ФУРЬЕ?

ГУСЕВ О.А., ЛАБУНЕЦ В.Г., ОСТХЕЙМЕР-ЛАБУНЕЦ Е.В., ЛЕБЕДЕВ С.А.

Уральский государственный технический университет - УПИ

В этой работе мы разрабатываем обобщенный (негармонический) анализ Эрмита и показываем что преобразование Фурье является сверткой Эрмита. Поскольку все классические свертки могут быть реализованы с помощью преобразования Фурье, то, следовательно, все классические время-инвариантные свертки могут быть реализованы с помощью преобразования Эрмита. Это говорит о том, что негармонический анализ Эрмита является более фундаментальным, чем традиционный классический гармонический анализ Фурье.

Пусть $f(x):\Omega\to A$ будет A-значным сигналом, где A произвольная алгебра (например, поле комплексных чисел). Обычно $\Omega=\mathbf{R}^n\times\mathbf{T}$, или $\Omega=\mathbf{Z}^n\times\mathbf{T}$, где $\mathbf{R}^n$, Z^n и $\mathbf{Z}_N^n$ - n-мерные векторные пространства над **R**, **Z** и $\mathbf{Z}_N$, соответственно, **T** – компактное (временное) подмножество **R**, **Z**, или $\mathbf{Z}_N$. Здесь, **R**, **Z** и $\mathbf{Z}_N$ - поле реальных чисел, кольца целых и целых по модулю N чисел, соотвественно. Пусть Ω^* - дуальное к Ω пространство. Обычно Ω и Ω^* называются временной и спектральной областями. Здесь мы сохраняем за переменной $x\in\Omega$ термин «время» и за $\omega\in\Omega^*$ термин «частота». Пусть

$$L_{Sig}(\Omega,A):=\left\{f(x)\middle|f(x):\Omega\to A\right\},\ \mathbf{L}_{Sp}\left(\Omega^*,A\right):=\left\{F(\omega)\middle|F(\omega):\Omega^*\to A\right\}$$

- два векторных пространства (сигнальное и спектральное) A-значных функций и $\{\varphi_\omega(x)\}_{\omega\in\Omega^*}$ - произвольная ортонормированная система функций в $L_{Sig}(\Omega,A)$. Тогда для каждого сигнала $f(x)\in L_{Sig}(\Omega,A)$ существует такой спектр $F(\omega)\in\mathbf{L}_{Sp}\left(\Omega^*,A\right)$, что

$$F(\omega)=CU\{f\}(\omega)=\int_{x\in\Omega}f(x)\overline{\varphi}_\omega(x)d\mu(x),$$
$$f(x)=CU^{-1}\{F\}(x)=\int_{x\in\Omega^*}F(\omega)\varphi_\omega(x)d\mu(\omega).$$

Эти два выражения называются обобщенными классическими U-преобразованиями Фурье. Главными строительными элементами классической теории являются операторы обобщенного сдвига и обобщенные модуляционные операторы. Для традиционных сдвигов во временной и частотной областях $\left(\hat{T}_x^\tau f\right)(x):=f(x+\tau)$, $\left(\hat{D}_{\omega F}^\nu\right)(\omega):=f(\omega+\nu)$ мы имеем

$$\hat{T}_x^\tau e^{j\omega x}=e^{j\omega(x+\tau)}=e^{j\omega x}e^{j\omega\tau},\ \text{и}\ \hat{D}_\omega^\nu e^{j\omega x}=e^{j(\omega+\nu)x}=e^{j\omega x}e^{j\omega\nu},$$

т.е. гармонические сигналы являются собственными функциями традиционных операторов сдвига. По образу и подобию мы вводим операторы обобщенного сдвига (ООС):

$$\left(\hat{T}_x^\tau f\right)(x):=f(x\hat{+}\tau),\ \left(\hat{D}_{\omega F}^\nu\right)(\omega):=f(\omega\tilde{+}\nu),\ \text{где}$$

$$\left(\hat{T}_{x\,\varphi_\omega}^\tau\right)(x):=\varphi_\omega(x\hat{+}\tau):=\varphi_\omega(x)\varphi_\omega(\tau)\ \text{и}\ \left(\hat{D}_{\omega\varphi_\omega}^\nu\right)(x):=\varphi_{\omega\tilde{+}\nu}(x):=\varphi_\omega(x)\varphi_\nu(\nu).$$

Хорошо известно, что стационарные линейные динамические системы описываются время-инвариантными свертками. Используя ООС можно ввести обобщенные свертки и корреляции. Следующие выражения

$$y(x):=(h\ \Diamond f)(x)=\hat{\mathbf{H}}f(x)=\int_{\upsilon\in\Omega}h(\tau)f\left(x\hat{-}\tau\right)d\mu(\tau),$$

$$Y(\omega):=(H\ \heartsuit F)(\omega)=\hat{\mathbf{H}}^*F(\omega)=\int_{\nu\in\Omega}H(\nu)F(\omega\tilde{-}\nu)\,d\mu(\nu)$$

$$(f\clubsuit_\theta g)(\tau\,|\,\theta)=\int_{x\in\Omega}f(x)\overline{g}\left(x\hat{-}\tau\right)d\mu(x),\ (F\spadesuit G)(\nu):=\int_{\omega\in\Omega^*}F(\omega)\overline{G}(\omega\tilde{-}\nu)\,d\,\mu(\omega)$$

называются обобщенными $\Diamond$-и $\heartsuit$ -*свертками* и $\clubsuit$ - *и* $\spadesuit$ -*кросскорреляциями.* Обобщенные свертки и корреляции имеют много общих с традиционной сверткой и корреляцией свойств. В частности, имеет место следующая

Теорема 1. U-преобразование Фурье отображает $\Diamond$-и $\heartsuit$-свертки и $\clubsuit$- и $\spadesuit$-кросскорреляци в произведения спектров и сигналов

$$U\{h\,\Diamond f\}=U\{h\}(\omega)U\{f\}=H(\omega)F(\omega),\ U^{-1}\{H\heartsuit F\}=U^{-1}\{H\}U^{-1}\{G\}=h(x)g(x),$$

$$U\{f \clubsuit g\} = U\{f\}U\overline{\{g\}} = F(\omega)\overline{G}(\omega),\ U^{-1}\{F \spadesuit G\} = U^{-1}\{F\}U^{-1}\{G\} = f(x)\overline{g}(x).$$

Пусть $\Omega := \mathbf{R} = (-\infty, +\infty)$, $\Omega^* := \mathrm{N} = \{0,1,\ldots\}$. Введем следующие сигнальные и спектральные пространства $L_2(\mathbf{R}, \mathbf{C}, \mu(t)) = \left\{ f(t) \,|\, \left(f(t) : R \to C \right) \wedge \left(\int_{x \in R} |f(t)|^2 \ \mu(t) dt < \infty \right) \right\}$ и

$L_2(\mathbf{N}, \mathbf{C}, \mu_n) = \left\{ F(n) \,|\, \left(F(n) : N \to C \right) \wedge \left(\sum_{n \in N} |F_n|^2 \ \mu_n < \infty \right) \right\}$, со скалярными произведениями

$$\langle f \,|\, g \rangle = \int_{t \in R} f(t) g(t) e^{-t^2/2} dt,\ \ \langle F \,|\, G \rangle = \sum_{n \in N} \frac{1}{2^n n! \sqrt{\pi}} F(n) G(n),$$

где $\mu(t) = e^{-t^2/2}$, $\mu_{\mathrm{n}} = \dfrac{1}{2^n n! \sqrt{\pi}}$. В этом случае обобщенное преобразование Фурье является преобразованием Эрмита в базисе функций Эрмита $Her_n(t)$:

$$F(n) = \mathbf{Her}\{f\}(n) = \int_{t \in R} f(t) Her_n(t) e^{-t^2/2} dt,$$

$$f(t) = \mathbf{Her}^{-1}\{F\}(t) = \sum_{n \in N} \frac{1}{2^n n! \sqrt{\pi}} F(n)\, Her_n(t).$$

Согласно теореме 1, любые системы стационарные в смысле Эрмита (т.е. описываемые обобщенными свертками Эрмита) $y(x) := (h \ \Diamond f)(x) = \int\limits_{\upsilon \in \Omega} h(\tau) f\left(x \dot{-} \tau\right) d\mu(\tau)$ могут быть представлены в спектральной области Эрмита как

$$y(x) := (h \ \Diamond f)(x) = \hat{\mathbf{H}} f(x) = [\mathbf{Her}^{-1} \mathrm{Diag}\{H(n)\} \mathbf{Her}] f(x),$$

где $H(n) = \mathbf{Her}_n\{h(t)\}$ - передаточная функция системы (преобразование Эрмита импульсной переходной характеристики $h(t)$). В частном случае, когда $H(n) = e^{jn}$, оператор $\hat{\mathbf{H}} = [\mathbf{Her}^{-1} \mathrm{Diag}\{H(n)\} \mathbf{Her}]$ свертки Эрмита представляет собой преобразование Фурье $\hat{\mathbf{F}} = [\mathbf{Her}^{-1} \mathrm{Diag}\{\mathrm{e}^{\text{-jn}}\} \mathbf{Her}]$. С другой стороны мы знаем, что любая традиционная классическая стационарная свертка имеет следующее представление $y(x) := (h * f)(x) = \hat{\mathbf{C}} f(x) = [\mathbf{F}^{-1} \mathrm{Diag}\{H(\omega)\} \mathbf{F}] f(x)$, где $H(\omega) = \mathbf{F}\{h(t)\}$ - переда-точная функция Фурье импульсной переходной характеристики стационарной динамической системы. Используя Эрмитово представление преобразования Фурье, мы получаем следующее представление для сверточного оператора

$$y(x) := (h * f)(x) = \hat{\mathbf{C}} f(x) = = \left[Her^{-1} Diag\{e^{+jn}\} Her \right] \cdot \mathrm{Diag}\{H(\omega)\} \cdot [Her^{-1} Diag\{e^{-jn}\} Her]$$

Таким образом, используя преобразование Эрмита, можно вычислить кака преобразование Фурье, так и время-стационарную свертку. Это свидетельствует о том, что гармонический анализ Фурье является частным случаем обобщенного негармонического анализа Эрмита, который может быть реализован с использованием квантового гармонического осциллятора.

Литература

1. Labunets, E., Astola, L., Labunets, V.G., Astola, J., and Egiazarian, K., (2000)) Nonlinear signal solitary, *Proc. of SPIE Nonlinear Image Processing XI,* 2000, Vol. 3961

IS THE NONHARMONIC ANALYSIS MORE FUNDAMENTAL THEN HARMONIC ANAKYSIS FOURIER?

GUSEV O., OSTHEIMER-LABUNETS E. , LABUNETS V., LEBEDEB S.

Urals State Technical Univesity –UPI

In this work we develop the Hermite generalized (nonharmonic) analysis and show that discrete Fourier transform is the Hermitean convolution. Since all classical (time-variant) convolutions can be realized via discrete

Fourier transform, then all classical convolutions can be realized via Hermite transform. This means that the Hermite nonharmonic analysis is more fundamental then the Fourier harmonic analysis. Let us introduce signal and spectral spaces

$$L_2(\mathbf{R},\mathbf{C})) = \left\{ f(t) \mid \left(f(t) : \mathbf{R} \to \mathbf{C} \right) \wedge \left(\int_{x\in R} | f(t) |^2 \, e^{-t^2/2} dt < \infty \right) \right\}$$

$$L_2(\mathbf{N},\mathbf{C}) = \left\{ F(n) \mid \left(F(n) : \mathbf{N} \to \mathbf{C} \right) \wedge \left(\sum_{n\in N} | F_n |^2 \, \frac{1}{2^n n! \sqrt{\pi}_{\ n}} < \infty \right) \right\}.$$

In these spaces we introduce Hermite transform in the Hermite basis $Her_n(t)$:

$$F(n) = \mathbf{Her}\{f\}(n) = \int_{t\in R} f(t) Her_n(t) e^{-t^2/2} dt, \quad f(t) = \mathbf{Her}^{-1}\{F\}(t) = \sum_{n\in N} \frac{1}{2^n n! \sqrt{\pi}} F(n)\, Her_n(t).$$

Linear Hermite-stationary systems are described by generalized Hermite convolutions

$$y(x) := \left(h \ \lozenge f \right)(x) = \hat{\mathbf{H}} f(x) = \int_{\upsilon\in\Omega} h(\tau) f\left(x \doteq \tau \right) d\mu(\tau),$$

where $\left(\hat{T}_x^{\tau} Her_n \right)(x) := Her_n(x \doteq \tau) := Her_n(x) Her_n(\tau)$ is the Hermite generalized shift oiperator.

In Hermite spectral domain these systems can by present as

$$y(x) := \left(h \ \lozenge f \right)(x) = \hat{\mathbf{H}} f(x) = [\mathbf{Her}^{-1} \mathrm{Diag}\{H(n)\} \mathbf{Her}] f(x),$$

where $H(n) = \boldsymbol{Her}_n\{h(t)\}$ - Hermite frequency system function. In particular case, when $H(n) = e^{jn}$, Hermite convolution operator $\hat{\mathbf{H}} = [\mathbf{Her}^{-1} \mathrm{Diag}\{H(n)\} \mathbf{Her}]$ is discrete Fourier transform, i.e. $\hat{\boldsymbol{F}} = [\boldsymbol{Her}^{-1} \mathrm{Diag}\{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n}\} \boldsymbol{Her}]$. But an arbitrary classical convolution has the following presentation:

$$y(x) := \left(h * f \right)(x) = \hat{\mathbf{C}} f(x) = [\mathbf{F}^{-1} \mathrm{Diag}\{H(\omega)\} \mathbf{F}] f(x),$$

where $H(\omega) = \boldsymbol{F}\{h(t)\}$ - Fourier frequency system. Using the Hermitean presentation of discrete Fourier transform we obtain a new presentation for classical convolution

$$y(x) := \left(h * f \right)(x) = \hat{\mathbf{C}} f(x) =$$

$$= \left[Her^{-1} Diag\{e^{+jn}\} Her \right] \cdot \mathrm{Diag}\{H(\omega)\} \cdot [Her^{-1} Diag\{e^{-jn}\} Her].$$

So, Fourier harmonic analysis is a particular case of generalized Hermite nonharmonic analysis, that can be realized by quantum harmonic oscillator.