

ПРОСТОЙ СПОСОБ ПОСТРОЕНИЯ МНОГОКАНАЛЬНЫХ ЛЕСТНИЧНЫХ АДАПТИВНЫХ ФИЛЬТРОВ

Джиган В.И.

Государственное унитарное предприятие г. Москвы Научно-производственный центр «Электронные вычислительно-информационные системы» (ГУП НПЦ «ЭЛВИС») а/я 19, Центральный проспект, Зеленоград, г. Москва К-460, Россия 124460
Тел.: +7-095-531-1961. Эл. почта: djigan@elvees.ru. Интернет: <http://www.elvees.ru>

Аннотация: Рассматривается способ построения многоканальных лестничных адаптивных фильтров с одинаковым числом весовых коэффициентов в каналах. Работа таких фильтров базируются на матричных вычислениях. Приведены вычислительные процедуры алгоритмов, ориентированные на последовательные и параллельные вычисления.

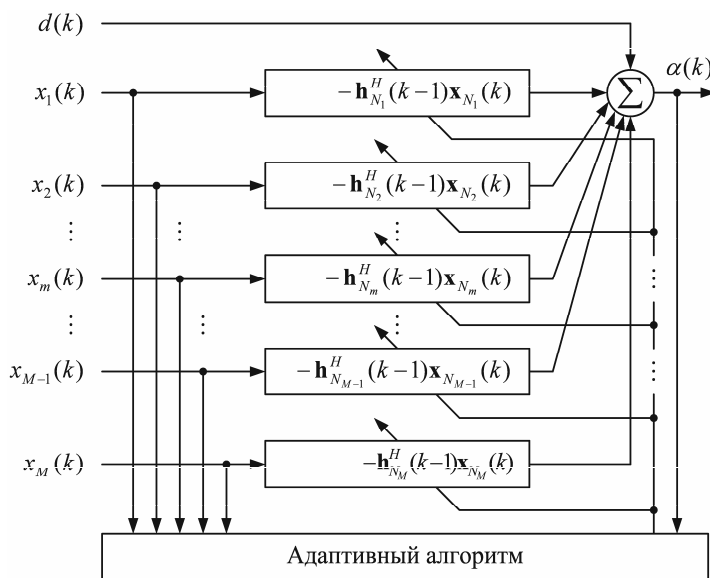


Рис. 1. Многоканальный адаптивный фильтр

Существует ряд приложений обработки сигналов, в которых используются многоканальные адаптивные фильтры. Примерами таких приложений являются компенсаторы сигналов многоканального (например, стерео) акустического эха, широкополосные адаптивные решетки, выравниватели (эквалайзеры) каналов связи, компенсаторы сигналов электрического эха (ближнего и дальнего) в модемах, нелинейные (полиномиальные) адаптивные фильтры. В общем случае число весовых коэффициентов в каналах таких фильтров может быть неодинаковым. Построение рекурсивных во времени алгоритмов по критерию наименьших квадратов (Recursive Least Squares, RLS) для

многоканальных адаптивных фильтров с неодинаковым числом весовых коэффициентов в каналах [1] базируется на использовании перестановочных матриц [2]. Разработка аналогичных адаптивных фильтров с рекурсивно изменяемым порядком (лестничных) является более сложной задачей. Один из способов решения такой задачи рассмотрен в [3]. Однако при использовании приемов [3] требуется переставлять каналы фильтра в порядке возрастания числа весовых коэффициентов. В то же время существует ряд приложений (например, подавление акустического эха), где используются адаптивные фильтры с одинаковым числом весовых коэффициентов в каналах. Адаптивные алгоритмы для лестничных фильтров с одинаковым числом весовых коэффициентов в каналах могут быть построены без использования перестановочных матриц. Данные алгоритмы являются предметом рассмотрения настоящей статьи.

Структура M -канального адаптивного фильтра приведена на рис. 1. Число весовых коэффициентов в каналах одинаковое, т.е. $N_1 = N_2 = \dots = N_m = \dots = N_M$. Ошибка, на выходе такого фильтра определяется

$$\text{как } \alpha(k) = \sum_{m=1}^M \alpha_m(k) = \sum_{m=1}^M [d_m(k) - \mathbf{h}^H(k-1) \times \mathbf{x}_{N_m}(k)], \text{ где } d(k) = \sum_{m=1}^M d_m(k) - \text{требуемый сигнал.}$$

Оптимальный вектор весовых коэффициентов многоканального адаптивного фильтра, минимизирующего эту ошибку по среднеквадратическому критерию, определяется как

$$\mathbf{h}_N(k) = \mathbf{R}_N^{-1}(k) \mathbf{r}_N(k), \text{ где } \mathbf{h}_N(k) = [\mathbf{h}_{N_1}^H(k), \mathbf{h}_{N_2}^H(k), \dots, \mathbf{h}_{N_m}^H(k), \dots, \mathbf{h}_{N_{M-1}}^H(k), \mathbf{h}_{N_M}^H(k)]^H, \text{ корреляционная}$$

матрица $\mathbf{R}_N(k)$ определяется на основе векторов входных сигналов

$$\boldsymbol{\chi}_N(k) = [\mathbf{x}_{N_1}^H(k), \mathbf{x}_{N_2}^H(k), \dots, \mathbf{x}_{N_m}^H(k), \dots, \mathbf{x}_{N_{M-1}}^H(k), \mathbf{x}_{N_M}^H(k)]^H, \mathbf{r}_N(k) - \text{вектор взаимной корреляции}$$

$\boldsymbol{\chi}_N(k)$ и $d(k)$, а $N = \sum_{m=1}^M N_m$ – суммарное число весовых коэффициентов.

Из определения переменной $\alpha(k)$ следует, что энергия минимизируемой ошибки содержит не только энергии ошибок отдельных каналов, но и взаимные энергии. Определив компоненты этих энергий в виде матрицы, а также следуя основным приемам получения RLS- и быстрых RLS-алгоритмов [1], можно получить матричные варианты таких алгоритмов для случая одинакового числа весовых коэффициентов в каналах. При этом ошибки линейного предсказания представляются векторами с числом элементов M , а энергии этих ошибок – матрицами с числом элементов $M \times M$. При определении векторов коэффициентов Калмана, посредством которых вычисляется вектор $\mathbf{h}_N(k)$, используются перестановочные матрицы.

В лестничных алгоритмах вместо векторов Калмана вычисляются коэффициенты отражения, являющиеся скалярными величинами. В случае многоканальных фильтров с одинаковым числом весовых коэффициентов в каналах коэффициенты отражения становятся матрицами $\Gamma_M^{f(n)}(k)$, $\Gamma_M^{b(n)}(k)$ и вектором $\gamma_M^{(n)}(k)$. Для их вычисления перестановочные матрицы не требуются.

С помощью указанного способа получены модификации (с бесконечным окном, с бесконечным окном и регуляризацией, со скользящим окном, со скользящим окном и регуляризацией, с использованием последовательных и параллельных [5] вычислений) пяти разновидностей многоканальных лестничных алгоритмов: на основе априори и апостериори ошибок, на основе априори и апостериори ошибок с обратными связями, на основе априори ошибок, на основе априори ошибок с обратными связями, на основе апостериори ошибок и на основе QR-разложения без операций извлечения квадратного корня.

Другие разновидности лестничных алгоритмов (см. [4]) таким способом получить нельзя, так как ряд скалярных переменных, используемых в одноканальных алгоритмах, в многоканальных алгоритмах становятся некоммутируемыми матрицами, в результате чего нельзя заменить некоторые произведения таких матриц другими переменными как в одноканальных алгоритмах.

Пример одного из перечисленных алгоритмов для случая последовательных вычислений приведен ниже в табл. 1. Параллельный вариант такого алгоритма приведен в табл. 2. Здесь нижние индексы x_U и x_D обозначают вычисления, связанные с независимыми потоками данных $x_m(k)$ и $x_m(k-L)$ при использовании скользящего окна в L отсчетов обрабатываемых сигналов [6], δ – параметр начальной регуляризации корреляционной матрицы. Интересуемым выходным сигналом ошибки является сигнал $\alpha(k) = \alpha_{x_U}^{(N+1)}(k)$ для алгоритма (табл. 1) или элемент вектора $\mathbf{a}_F^{(N+1)}(k)$, зависящий от x_U для алгоритма (табл. 2). В табл. 1 и табл. 2 \mathbf{I}_M и \mathbf{O}_M – единичная и нулевая матрицы, а $\mathbf{0}_M$ – нуль-вектор. Остальные обозначения, используемые при описании алгоритмов, в основном совпадают с обозначениями, принятыми в [1, 4-6].

При инициализации алгоритмов как показано в уравнениях (1.0) и (2.0) алгоритмы (табл. 1 и табл. 2) эквивалентны соответствующим многоканальным алгоритмам [1]. Арифметическая сложность представленных многоканальных алгоритмов (без учета операций обращения матриц энергий ошибок) примерно в M раз больше сложности одноканальных алгоритмов [4], а при использовании регуляризации, скользящего окна или обоих приемов одновременно эта сложность также увеличивается в F раз, где $F = 2$ или $F = 4$.

Таблица 1. Последовательный многоканальный лестничный RLS-алгоритм со скользящим окном, с обратными связями на основе априори ошибок

Вычисления	Ссылки
Initialization : $\mathbf{E}_{M,x_D}^{f(n)}(0) = \delta^2 \mathbf{I}_M$, $\mathbf{E}_{M,x_D}^{b(n)}(0) = \delta^2 \lambda^{n-1} \mathbf{I}_M$, $\mathbf{E}_{M,x_U}^{b(n)}(0) = \delta^2 \lambda^{n-1} \mathbf{I}_M$, $\varphi_{x_U}^{(n)}(0) = 1$, $\varphi_{x_D}^{(n)}(0) = 1$, $\mathbf{a}_{M,x_U}^{b(n)}(0) = \mathbf{0}_M$, $\mathbf{a}_{M,x_D}^{b(n)}(0) = \mathbf{0}_M$, $\Gamma_{M,x_D}^{f(n)}(0) = \mathbf{O}_M$, $\Gamma_{M,x_D}^{b(n)}(0) = \mathbf{O}_M$, $\gamma_{M,x_D}^{(n)}(0) = \mathbf{0}_M$, $n = 1, 2, \dots, N$	(1.0)
For $k = 1, 2, \dots, K$ $\mathbf{a}_{M,x_U}^{f(1)}(k) = [x_1(k), \dots, x_M(k)]^T$, $\mathbf{a}_{M,x_U}^{b(1)}(k) = [x_1(k), \dots, x_M(k)]^T$, $\alpha_{x_U}^{(1)}(k) = d(k)$, $e_{x_U}^{(1)}(k) = d(k)$, $\varphi_{x_U}^{(1)}(k) = 1$	(1.1)
$\mathbf{a}_{M,x_D}^{f(1)}(k) = [x_1(k-L), \dots, x_M(k-L)]^T$, $\mathbf{a}_{M,x_D}^{b(1)}(k) = [x_1(k-L), \dots, x_M(k-L)]^T$, $\alpha_{x_D}^{(1)}(k) = d(k-L)$, $e_{x_D}^{(1)}(k) = d(k-L)$, $\varphi_{x_D}^{(1)}(k) = 1$	(1.2)
For $n = 1, 2, \dots, N$	

Вычисления	Ссылки
$\mathbf{E}_{M,x_U}^{f(n)}(k) = \lambda \mathbf{E}_{M,x_D}^{f(n)}(k-1) + \boldsymbol{\alpha}_{M,x_U}^{f(n)}(k) \varphi_{x_U}^{f(n)}(k-1) \boldsymbol{\alpha}_{M,x_U}^{f(n)H}(k)$	(1.3)
$\mathbf{E}_{M,x_U}^{b(n)}(k) = \lambda \mathbf{E}_{M,x_D}^{b(n)}(k-1) + \boldsymbol{\alpha}_{M,x_U}^{b(n)}(k) \varphi_{x_U}^{b(n)}(k) \boldsymbol{\alpha}_{M,x_U}^{b(n)H}(k)$	(1.4)
$\boldsymbol{\alpha}_{M,x_U}^{f(n+1)}(k) = \boldsymbol{\alpha}_{M,x_U}^{f(n)}(k) + \boldsymbol{\Gamma}_{M,x_D}^{f(n)H}(k-1) \boldsymbol{\alpha}_{M,x_U}^{b(n)}(k-1)$	(1.5)
$\boldsymbol{\alpha}_{M,x_U}^{b(n+1)}(k) = \boldsymbol{\alpha}_{M,x_U}^{b(n)}(k-1) + \boldsymbol{\Gamma}_{M,x_D}^{b(n)H}(k-1) \boldsymbol{\alpha}_{M,x_U}^{f(n)}(k)$	(1.6)
$\alpha_{x_U}^{(n+1)}(k) = \alpha_{x_U}^{(n)}(k) + \gamma_{M,x_D}^{(n)H}(k-1) \alpha_{M,x_U}^{b(n)}(k)$	(1.7)
$\varphi_{x_U}^{(n+1)}(k) = \varphi_{x_U}^{(n)}(k) \left[\mathbf{I} - \boldsymbol{\alpha}_{M,x_U}^{b(n)H}(k) \left[\mathbf{E}_{M,x_U}^{b(n)}(k) \right]^{-1} \boldsymbol{\alpha}_{M,x_U}^{b(n)}(k) \varphi_{x_U}^{(n)}(k) \right]$	(1.8)
$\boldsymbol{\Gamma}_{M,x_U}^{f(n)}(k) = \boldsymbol{\Gamma}_{M,x_D}^{f(n)}(k-1) - \left[\mathbf{E}_{M,x_U}^{b(n)}(k-1) \right]^{-1} \boldsymbol{\alpha}_{M,x_U}^{b(n)}(k-1) \varphi_{x_U}^{(n)}(k-1) \boldsymbol{\alpha}_{M,x_U}^{f(n+1)H}$	(1.9)
$\boldsymbol{\Gamma}_{M,x_U}^{b(n)}(k) = \boldsymbol{\Gamma}_{M,x_D}^{b(n)}(k-1) - \left[\mathbf{E}_{M,x_U}^{f(n)}(k) \right]^{-1} \boldsymbol{\alpha}_{M,x_U}^{f(n)}(k) \varphi_{x_U}^{(n)}(k-1) \boldsymbol{\alpha}_{M,x_U}^{b(n+1)H}(k)$	(1.10)
$\boldsymbol{\gamma}_{M,x_U}^{(n)}(k) = \boldsymbol{\gamma}_{M,x_D}^{(n)}(k-1) - \left[\mathbf{E}_{M,x_U}^{b(n)}(k) \right]^{-1} \boldsymbol{\alpha}_{M,x_U}^{b(n)}(k) \varphi_{x_U}^{(n)}(k) \alpha_{M,x_U}^{(n+1)*}(k)$	(1.11)
$\mathbf{E}_{M,x_D}^{f(n)}(k) = \mathbf{E}_{M,x_U}^{f(n)}(k) - \mu \boldsymbol{\alpha}_{M,x_D}^{f(n)}(k) \varphi_{x_D}^{(n)}(k-1) \boldsymbol{\alpha}_{M,x_D}^{f(n)H}(k)$	(1.12)
$\mathbf{E}_{M,x_D}^{b(n)}(k) = \mathbf{E}_{M,x_U}^{b(n)}(k) - \mu \boldsymbol{\alpha}_{M,x_D}^{b(n)}(k) \varphi_{x_D}^{(n)}(k) \boldsymbol{\alpha}_{M,x_D}^{b(n)H}(k)$	(1.13)
$\boldsymbol{\alpha}_{M,x_D}^{f(n+1)}(k) = \boldsymbol{\alpha}_{M,x_D}^{f(n)}(k) + \boldsymbol{\Gamma}_{M,x_U}^{f(n)H}(k) \boldsymbol{\alpha}_{M,x_D}^{b(n)}(k-1)$	(1.14)
$\boldsymbol{\alpha}_{M,x_D}^{b(n+1)}(k) = \boldsymbol{\alpha}_{M,x_D}^{b(n)}(k-1) + \boldsymbol{\Gamma}_{M,x_U}^{b(n)H}(k) \boldsymbol{\alpha}_{M,x_D}^{f(n)}(k)$	(1.15)
$\alpha_{x_D}^{(n+1)}(k) = \alpha_{x_D}^{(n)}(k) + \gamma_{M,x_U}^{(n)H}(k) \alpha_{M,x_D}^{b(n)}(k)$	(1.16)
$\varphi_{x_D}^{(n+1)}(k) = \varphi_{x_D}^{(n)}(k) \left[\mathbf{I} + \mu \boldsymbol{\alpha}_{M,x_D}^{b(n)H}(k) \left[\mathbf{E}_{M,x_D}^{b(n)}(k) \right]^{-1} \boldsymbol{\alpha}_{M,x_D}^{b(n)}(k) \varphi_{x_D}^{(n)}(k) \right]$	(1.17)
$\boldsymbol{\Gamma}_{M,x_D}^{f(n)}(k) = \boldsymbol{\Gamma}_{M,x_U}^{f(n)}(k) + \mu \left[\mathbf{E}_{M,x_D}^{b(n)}(k-1) \right]^{-1} \boldsymbol{\alpha}_{M,x_D}^{b(n)}(k-1) \varphi_{x_D}^{(n)}(k-1) \boldsymbol{\alpha}_{M,x_D}^{f(n+1)H}$	(1.18)
$\boldsymbol{\Gamma}_{M,x_D}^{b(n)}(k) = \boldsymbol{\Gamma}_{M,x_U}^{b(n)}(k) + \mu \left[\mathbf{E}_{M,x_D}^{f(n)}(k) \right]^{-1} \boldsymbol{\alpha}_{M,x_D}^{f(n)}(k) \varphi_{x_D}^{(n)}(k-1) \boldsymbol{\alpha}_{M,x_D}^{b(n+1)H}(k)$	(1.19)
$\boldsymbol{\gamma}_{M,x_D}^{(n)}(k) = \boldsymbol{\gamma}_{M,x_U}^{(n)}(k) + \mu \left[\mathbf{E}_{M,x_D}^{b(n)}(k) \right]^{-1} \boldsymbol{\alpha}_{M,x_D}^{b(n)}(k) \varphi_{x_D}^{(n)}(k) \alpha_{M,x_D}^{(n+1)*}(k)$	(1.20)
End for n	
End for k	

Продолжением развития рассмотренного метода будет его распространение на лестничные алгоритмы для многоканальных лестничных адаптивных фильтров с неодинаковым числом весовых коэффициентов в каналах, а также получение таких алгоритмов в форме, не требующей применения матричных вычислений, за исключением алгоритмов на основе параллельных вычислений, в которых используются матрицы отношений правдоподобия с $\Phi_F^{(n)}(k)$ ограниченным числом элементов $F \times F$.

Таблица 2. Параллельный многоканальный лестничный RLS-алгоритм с обратными связями на основе априори ошибок

Вычисления	Ссылки
Initialization: $\mathbf{E}_M^{f(n)}(0) = \delta^2 \mathbf{I}_M$, $\mathbf{E}_M^{b(n)}(0) = \delta^2 \lambda^{n-1} \mathbf{I}_M$, $\Phi_F^{(n)}(0) = \mathbf{S}_F$, $\dot{\mathbf{A}}_{MF}^{b(n)}(0) = \mathbf{O}_{MF}$, $\boldsymbol{\Gamma}_M^{f(n)}(0) = \mathbf{O}_{MF}$, $\boldsymbol{\Gamma}_M^{b(n)}(0) = \mathbf{O}_M$, $\boldsymbol{\gamma}_M^{(n)}(0) = \mathbf{0}_M$, $n = 1, 2, \dots, N$	(2.0)
For $k = 1, 2, \dots, K$	
$\Phi_F^{(1)}(0) = \mathbf{S}_F$, $\dot{\mathbf{A}}_{MF}^{f(1)}(k) = \mathbf{X}_{MF}(k)$, $\dot{\mathbf{A}}_{MF}^{b(1)}(k) = \mathbf{X}_{MF}(k)$, $\boldsymbol{\alpha}_F^{(1)}(k) = \mathbf{d}_F(k)$	(2.1)
For $n = 1, 2, \dots, N$	
$\mathbf{E}_M^{f(n)}(k) = \lambda \mathbf{E}_M^{f(n)}(k-1) + \dot{\mathbf{A}}_{MF}^{f(n)}(k) \Phi_F^{(n)}(k-1) \dot{\mathbf{A}}_{MF}^{f(n)H}(k)$	(2.2)
$\mathbf{E}_M^{b(n)}(k) = \lambda \mathbf{E}_M^{b(n)}(k-1) + \dot{\mathbf{A}}_{MF}^{b(n)}(k) \Phi_F^{(n)}(k) \dot{\mathbf{A}}_{MF}^{b(n)H}(k)$	(2.3)
$\dot{\mathbf{A}}_{MF}^{f(n+1)}(k) = \dot{\mathbf{A}}_{MF}^{f(n)}(k) + \boldsymbol{\Gamma}_M^{f(n)H}(k-1) \dot{\mathbf{A}}_{MF}^{b(n)}(k-1)$	(2.4)
$\dot{\mathbf{A}}_{MF}^{b(n+1)}(k) = \dot{\mathbf{A}}_{MF}^{b(n)}(k-1) + \boldsymbol{\Gamma}_M^{b(n)H}(k-1) \dot{\mathbf{A}}_{MF}^{f(n)}(k)$	(2.5)

Вычисления	Ссылки
$\alpha_F^{(n+1)}(k) = \alpha_F^{(n)}(k) + \Gamma_M^{(n)H}(k-1) \dot{\mathbf{A}}_{MF}^{b(n)}(k)$	(2.6)
$\Phi_F^{(n+1)}(k) = \Phi_F^{(n)}(k) \left[\mathbf{I}_F - \dot{\mathbf{A}}_{MF}^{b(n)H}(k) \left[\mathbf{E}_M^{b(n)}(k) \right]^{-1} \dot{\mathbf{A}}_{MF}^{b(n)}(k) \right] \Phi_F^{(n)}(k)$	(2.7)
$\Gamma_M^{f(n)}(k) = \Gamma_M^{f(n)}(k-1) - \left[\mathbf{E}_M^{b(n)}(k-1) \right]^{-1} \mathbf{A}_{MF}^{b(n)}(k-1) \Phi_F^{(n)}(k-1) \mathbf{A}_{MF}^{f(n+1)H}$	(2.8)
$\Gamma_M^{b(n)}(k) = \Gamma_M^{b(n)}(k-1) - \left[\mathbf{E}_M^{f(n)}(k) \right]^{-1} \mathbf{A}_{MF}^{f(n)}(k) \Phi_F^{(n)}(k-1) \mathbf{A}_{MF}^{b(n+1)H}(k)$	(2.9)
$\Gamma_{M,x_U}^{(n)}(k) = \Gamma_{M,p_D}^{(n)}(k-1) - \left[\mathbf{E}_{M,x_U}^{b(n)}(k) \right]^{-1} \mathbf{A}_{MF}^{b(n)}(k) \Phi_F^{(n)}(k) \alpha_M^{(n+1)*}(k)$	(2.10)
End for n	
End for k	

Таким образом, в работе представлен простой способ построения RLS-алгоритмов для многоканальных адаптивных фильтров. Рассмотренные примеры вычислительных процедур дают представление о вычислительной и алгоритмической сложности таких фильтров. Алгоритмы могут быть реализованы как программно, так и аппаратно, чему способствует каскадная структура процедуры вычислений. Алгоритмы могут быть использованы в приложениях, где требуются многоканальные адаптивные фильтры с одинаковым числом весовых коэффициентов в каналах.

Литература

1. Джиган В.И. Многоканальные RLS- и быстрые RLS-алгоритмы адаптивной фильтрации // Успехи современной радиоэлектроники. – 2004. – №11. – С. 48–77.
2. Glentis G.A., Kalouptsidis N. Efficient order recursive algorithms for multichannel LS filtering // Proceedings of the International Conference on Acoustic Speech and Signal Processing. – Albuquerque, NM, USA. – Vol. 5. – 1990. – P. 1429–1432.
3. Ling F., Proakis J. A generalized multichannel least squares lattice algorithm based on sequential processing stages // IEEE Trans. Acoustics, Speech and Signal Processing. – 1984. – Vol. 32. – №2. – P. 381–389.
4. Джиган В.И. Многообразие лестничных RLS-алгоритмов адаптивной фильтрации // Цифровая обработка сигналов. – 2005. – №3. – С. 2–12.
5. Джиган В.И. Параллельные вычисления в лестничных RLS-алгоритмах // Доклады 8-й Международной конференции «Цифровая обработка сигналов и ее применения (DSPA-2006)». – Москва, 2006. – В настоящем сборнике трудов.

A SIMPLE METHOD OF MULTICHANNEL LATTICE ADAPTIVE FILTERS DEVELOPMENT

Djigan V.

Electronic VLSI Engineering & Embedded Systems (ELVEES) R&D Center of Microelectronics

POB 19, Centralny Prospect, Zelenograd, Moscow K-460, Russia 124460

Tel.: +7-495-531-1961. E-mail: djigan@elvees.ru. URL: <http://www.elvees.ru>

There is a number of signal processing applications where multichannel adaptive filters are used. The development of time-recursive least squares (RLS) algorithms for multichannel adaptive filters with unequal number of weights in channels is based on the using of permutation matrices [1]. The development of order-recursive (lattice)

attenuation; the maximal narrow transition width at the nominal passband; the maximal expansion of the passband at the left; the maximal expansion of the passband on the right; the maximal symmetric expansion of the passband; the minimal ripple in the right part of the passband; the minimal ripple in the left part of the passband; the minimal ripple in the middle part of the passband for bandpass filters and

the minimal ripple in two passbands of bandstop filters except for intervals adjoining to transition bands; the maximum of the minimal attenuation in some part of the stopband.

In the program Extremal the minimal filter order is determined. It can be changed aside increase and back at simultaneous observation over change of the extreme response parameters.

The program allows to operate flexibly with the initial parameter and order values for various digital and analog filters with the purpose of achievement of desirable responses. Extremal is useful and easy-to-use auxiliary tool for developers of the radio-electronic equipment.

References

1. Vlcek M., Unbehauen R. Degree, ripple and transition width of elliptic filters. // IEEE Trans. 1989. CAS-36. № 3. P.469-472.
2. Mingazin A.T. Way of improvement of filter magnitude responses. // Radiotekhnika. 1985. № 9. P. 89-91.
3. Mingazin A.T. Extremal parameters of analog and digital filters. // Electrosvyaz. 1999. № 1. P. 22-23.
4. Tomic D.V., Lutovac M. D., Evans B.L. Advanced digital IIR filter design. // ECCTD. 1999. P.1323-1326.

