

## ШУМ ОКРУГЛЕНИЯ И РАЗРЯДНОСТЬ КОЭФФИЦИЕНТОВ ЧЕТЫРЕХ СТРУКТУР БИХ-ФИЛЬТРОВ

Мингазин А.Т.

РАДИС Лтд, Россия, Москва, Зеленоград, 124460, а/я 20.  
Тел./факс. (095) 535-35-13, e-mail: alexmin@orc.ru

**Реферат.** Рассмотрены каскадные структуры БИХ-фильтров на звеньях прямой и нормальной формы, структуры на основе параллельного соединения двух фазовых цепей на звеньях прямой и волновой формы. Проведен анализ шума округления и разрядности коэффициентов этих структур для двух наборов требований к АЧХ полосовых фильтров в широком диапазоне изменения граничных частот.

**1. Введение.** Выбор структуры цифровых фильтров является одной из важных проблем в проектировании систем цифровой обработки сигналов. В самом деле, для конкретных требований разные по сложности исполнения структуры имеют различные шумовые свойства, уровни малых предельных циклов и разрядности коэффициентов. Четкие рекомендации дать не всегда возможно. В этом случае приходится проводить дополнительные исследования с целью выбора подходящей структуры фильтра [1]. В данной статье проводится анализ четырех структур БИХ-фильтров с фиксированной точкой с целью выяснения их шумовых характеристик и разрядности коэффициентов. Рассмотрены два набора требований к АЧХ полосовых фильтров 6-го и 10-го порядка для ряда граничных частот, изменяющихся в очень широком диапазоне.

**2. Исследуемые структуры.** Для упомянутого анализа используем четыре структуры фильтров. Две каскадные структуры, одна (К-ПФ) на звеньях (2-го порядка) прямой формы, а другая (К-НФ) на звеньях нормальной формы, и две структуры на основе параллельного соединения двух фазовых цепей, причем в одной (Ф-ПФ) фазовые цепи представляют собой каскадное соединение фазовых звеньев прямой формы, а в другой (Ф-ВФ) - волновой формы. Для масштабирования используем  $L_\infty$ -норму.

На рис. 1 представлены звенья 2-го порядка для каскадных фильтров. Это звенья прямой и нормальной формы на рис. 1а и б, соответственно. Полагаем, что округление в каждом из звеньев выполняется после сумматоров. Масштабные множители учтены в коэффициентах прямых связей.

На рис. 2 представлены фазовые звенья 2-го порядка для фильтров на основе параллельного соединения двух фазовых цепей. В звене прямой формы на рис. 2а округление выполняется только в выходном сумматоре, а в звене волновой формы на рис. 2б после каждого сумматора. Масштабный коэффициент  $C$  на рис. 2б выбирается равным степени два, а коэффициенты  $S_i = \text{sign}(\gamma_i)$ ,  $i=1,2$  [1].

**3. Отношение шум/сигнал.** Для хорошо известной вероятностной модели округления чисел с фиксированной точкой минимальное отношение (шум округления)/сигнал на выходе фильтра

$$\frac{N}{S} = 10 \lg \frac{1,5G}{H^2} - 6B = R - 6B,$$

где  $G$  – усиление шума округления,  $H$  - максимальный коэффициент передачи фильтра,  $B$ - число бит, включая знак, сохраняемое после округления.

Для сравнения структур фильтров по отношению  $N/S$ , используем параметр  $R$ , независящий от конкретного числа бит  $B$ . В каскадных структурах параметр  $R$  зависит от группировки полюсно-нулевых пар и упорядочения звеньев. Для минимизации этого параметра применим эвристическую процедуру из [2].

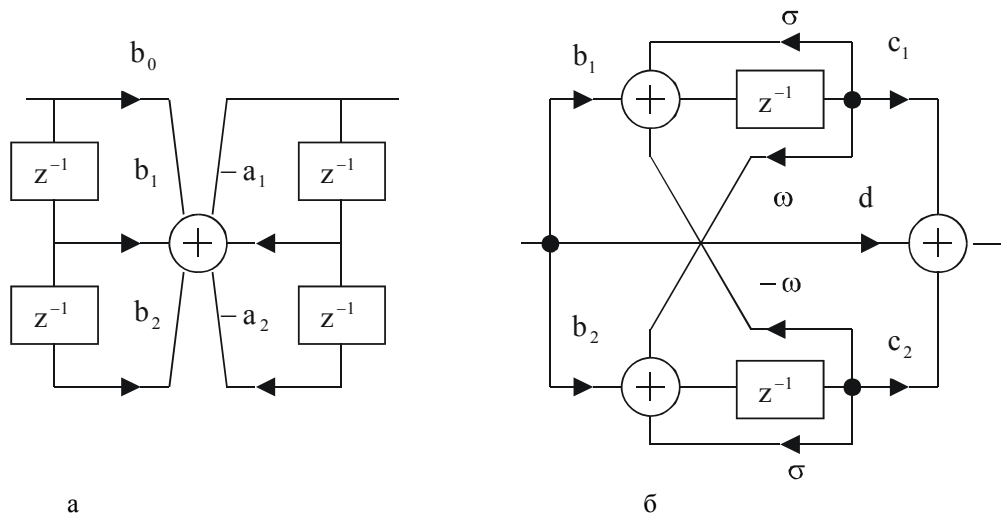


Рис. 1. Звенья 2-го порядка для каскадных фильтров: прямая форма (а), нормальная форма (б).

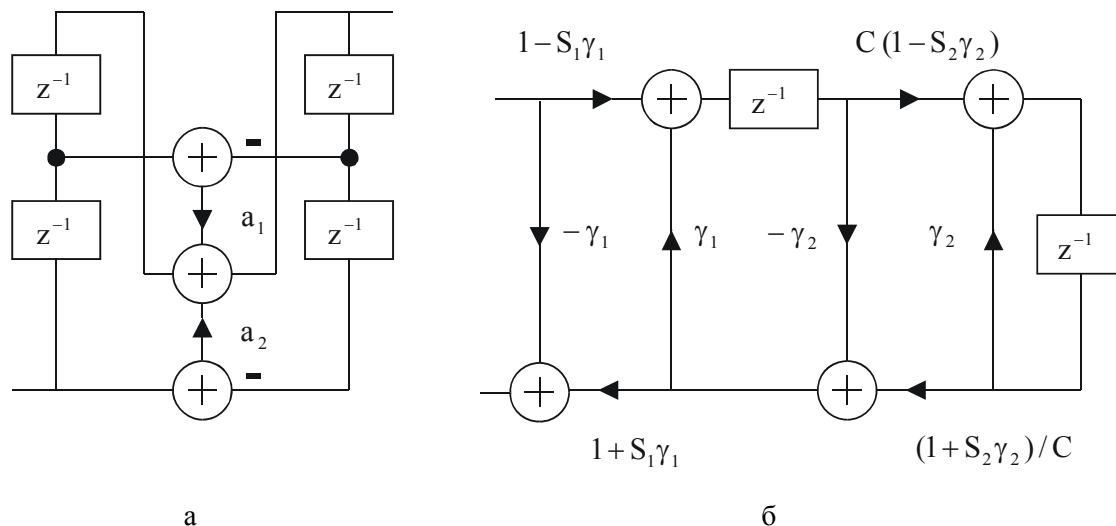


Рис. 2. Фазовые звенья 2-го порядка для фильтров на основе параллельного соединения двух фазовых цепей: прямая форма (а), волновая форма (б).

**4. Разрядность коэффициентов.** Под разрядностью двоичных коэффициентов фильтра будем понимать их мантиссу  $M$ . Для каждой из рассматриваемых структур  $M$  минимизируем с помощью однопараметрического алгоритма вариации исходных параметров (ВИП-1 [3]), в котором вариации подлежит неравномерность АЧХ в полосе пропускания. В качестве аналоговых прототипов используем фильтры Золотарева-Кауэра. Переход к цифровым фильтрам выполним с помощью билинейного преобразования. Введение масштабных множителей путем изменения коэффициентов числителей каскадных структур делает зависимыми эти коэффициенты от неравномерности АЧХ. Однако эту зависимость проигнорируем.

**5. Сравнение структур.** Для сравнения структур используем алгоритм получения минимальных  $R$  и  $M$ , сочетающий упомянутую выше эвристическую процедуру и алгоритм ВИП-1. В этом комбинированном алгоритме в начале делается попытка найти решения с минимальной  $M$ , а затем, в случае удачи, ведется поиск решения с минимальным  $R$ . Ниже анализируются результаты синтеза полосовых фильтров с двумя наборами требований для ряда левых граничных частот полосы пропускания, изменяющихся в широком диапазоне от 0,0006 (очень низкая частота) до 0,2 (частота из области средних частот). Частота дискретизации принята равной 1.

Пример 1. Требования к АЧХ полосового фильтра 6-го порядка:

- полоса пропускания = 0,01;
- неравномерность в полосе пропускания  $\leq 3$  дБ;
- минимальное ослабление в полосе задерживания  $\geq 60$  дБ;
- коэффициент прямоугольности (параметр  $\alpha$  в [4]) = 5.

В табл. 1 приведены найденные значения  $R$  и  $M$  для ряда граничных частот из заданного диапазона. Как и следовало ожидать, с уменьшением частоты шум всех фильтров усиливается, т.е. растет значение  $R$ . Для частоты 0,0006 наилучшими шумовыми свойствами обладают структуры К-НФ ( $R=29,2$  дБ) и Ф-ВФ ( $R=31,9$  дБ), что сильно отличает их от структур К-ПФ и Ф-ПФ, для которых  $R=70,2$  дБ и 65,3 дБ, соответственно. Различие по  $R$  для К-НФ и К-ПФ составляет  $70,2-29,2=41$  дБ. Это означает, что для получения одинаковых шумовых свойств в этих структурах число бит внутренней арифметики в К-ПФ должно быть на 7 бит больше чем в К-НФ. Из табл. 1 также следует, что в рассматриваемом диапазоне частот значение  $R$  изменяется плавно, примерно на 8 дБ для структур К-НФ и Ф-ВФ, и очень сильно, примерно на 52 дБ для К-ПФ и Ф-ПФ. Наилучшими шумовыми свойствами вблизи частоты 0,2 обладает структура Ф-ПФ.

Таблица 1

Левая граничная частота	R, дБ				M			
	К-ПФ	К-НФ	Ф-ПФ	Ф-ВФ	К-ПФ	К-НФ	Ф-ПФ	Ф-ВФ
0,0006	70,2	29,2	65,3	31,9	21	12	16	17
0,0008	67,0	27,0	61,9	29,3	20	11	18	19
0,001	65,1	27,3	59,4	28,8	19	11	16	18
0,002	56,4	24,3	50,8	26,3	17	10	16	17
0,004	49,1	22,1	43,4	24,9	15	10	14	15
0,006	45,7	22,7	39,9	24,9	14	9	12	14

0,008	44,2	21,7	37,0	24,8	12	10	12	13
0,01	41,5	22,2	35,0	25,7	12	9	12	13
0,02	35,4	21,4	29,3	25,6	10	9	11	12
0,04	30,3	21,1	23,9	25,9	9	9	11	11
0,06	26,2	21,4	20,5	24,1	8	9	11	11
0,08	25,8	20,8	18,4	25,9	8	9	11	11
0,1	23,4	21,1	16,6	24,5	8	9	11	11
0,2	18,0	22,1	12,9	24,1	7	7	11	11

С уменьшением частоты растет разрядность коэффициентов М для всех фильтров. Для частоты 0,0006 минимальное М=12 имеет структура К-НФ, максимальное М=21 - К-ПФ, а две другие структуры имеют промежуточные значения. Наиболее сильное отличие в значениях М (7...21 бит) в рассматриваемом диапазоне частот свойственно структуре К-ПФ. Для частот 0,06...0,2 этой же структуре свойственны меньшие значения М (на 3- 4 бит) в сравнении с Ф-ПФ и Ф-ВФ, имеющих близкие значения М во всем диапазоне частот. Наконец, К-ПФ для частот 0,06...0,2 имеет меньшие значения М (хотя всего на 1 бит) в сравнении с К-НФ.

Таблица 2

Левая граничная частота	R, дБ				M			
	К-ПФ	К-НФ	Ф-ПФ	Ф-ВФ	К-ПФ	К-НФ	Ф-ПФ	Ф-ВФ
0,0006	77,2	35,3	71,4	37,0	19	13	19	20
0,0008	73,3	31,8	67,6	34,8	20	13	20	21
0,001	71,8	33,0	65,3	34,5	18	13	18	19
0,002	63,7	29,4	57,2	32,0	16	12	17	18
0,004	57,2	29,2	50,3	31,1	14	12	15	16
0,006	53,2	28,2	46,8	31,1	15	12	14	16
0,008	49,9	28,1	44,2	31,4	14	11	14	15
0,01	47,9	27,9	42,5	32,4	14	12	14	15
0,02	44,2	27,5	36,2	32,3	13	12	11	12
0,04	36,6	30,9	30,9	31,9	12	12	11	13
0,06	33,7	27,8	27,4	31,0	11	12	12	12
0,08	31,2	28,4	24,9	32,1	11	12	11	13
0,1	29,8	28,3	23,1	31,1	10	12	12	12
0,2	25,6	28,7	19,2	30,3	11	12	11	12

Пример 2. Требования к АЧХ полосового фильтра 10-го порядка:

- полоса пропускания = 0,005;
- неравномерность в полосе пропускания  $\leq 0,5$  дБ;
- минимальное ослабление в полосе задерживания  $\geq 40$  дБ;
- коэффициент прямоугольности = 1,4.

В табл. 2 приведены найденные значения R и M для ряда граничных частот из заданного выше диапазона. Как видим, несмотря на сильные изменения требований в сравнении с предыдущими качественное поведение зависимостей R и M от граничной частоты примерно сохраняется, но в целом шумы подросли примерно на 6 дБ. Для структуры К-ПФ в диапазоне частот 0,0006-0,004 в табл. 2 наблюдается уменьшение M на 1 или 2 бита в сравнении с данными табл. 1. В остальных случаях для всех структур переход к новым требованиям приводит к росту M. Из табл. 2 видно, что для К-НФ характерен очень малый разброс в значениях M (всего в 2 бита, а не в 5 бит, как в табл. 1).

**6. Заключение.** Исследованы шумовые свойства и разрядности коэффициентов четырех структур полосовых фильтров для двух наборов требований к АЧХ в широком диапазоне изменения граничных частот. Для этих наборов требований почти во всем диапазоне, исключая некоторую область средних частот, каскадные фильтры на звеньях нормальной формы и фильтры на основе фазовых цепей на звеньях волновой формы имеют значительно лучшие шумовые свойства в сравнении с каскадными фильтрами на звеньях прямой формы и фильтрами на основе фазовых цепей на звеньях прямой формы. В области средних частот лучшими шумовыми свойствами обладают каскадные фильтры на звеньях прямой формы. Каскадные фильтры на звеньях нормальной формы имеют значительно меньшую разрядность коэффициентов в окрестности очень низких частот в сравнении с другими тремя структурами.

В тоже время, для одного набора требований все четыре структуры в области примыкающей к средним частотам имеют примерно одинаковые разрядности, а для другого набора обе каскадные структуры имеют существенно меньшие разрядности в сравнении с фильтрами на основе фазовых звеньев. Очевидно, что все

эти выводы, сделанные относительно граничных частот 0,0006...0,2, в силу известной симметрии, справедливы и для частот 0,4994...0,3.

#### Литература

1. Renfors M., Zigouris E. Signal processor implementation of digital all-pass filters. // IEEE Trans. 1988. ASSP-36. May. P. 714-728.
2. Мингазин А.Т., Зорич А. А. Минимизация шума округления каскадных рекурсивных цифровых фильтров. // Электронная техника. 1992. Сер. 10. № 1,2. С. 37-43.
3. Мингазин А.Т. Минимизация длины слова коэффициентов каскадных цифровых БИХ-фильтров. // 5-я международная конференция. 'Цифровая обработка сигналов и ее применение'. 2003.-М.: Т. 1. С. 75-77.
4. Мингазин А.Т. Экстремальные параметры аналоговых и цифровых фильтров. // Электросвязь. 1999. № 1. С. 22-23.

---

## ROUND OFF NOISE AND COEFFICIENT WORDLENGTH OF FOUR IIR FILTER STRUCTURES

Mingazin A.

RADIS Ltd, Russia, Moscow, Zelenograd, 124460, POB 20.  
Tel./fax (095) 535-35-13, e-mail: alexmin@orc.ru

The choice of digital filter structure is one of the important problems in DSP system design. Really, for concrete specifications different structures have various roundoff noise properties, levels of small limit cycles, conditions for absence of the overflow oscillation, coefficient wordlengths and implementation complexity. We can not give always precise recommendations. In such case we should carry out additional researches with the purpose of choice a suitable filter structure [1]. In this paper four fixed point IIR filter structures are studied in relation to their roundoff noise performances and coefficient wordlengths. Two sets of specifications are considered for bandpass filters of 6-th and 10-th order at the edge frequencies varying in very wide range from 0.0006 (the very low frequency) up to 0.2 (the frequency from the area of average frequencies). The sampling frequency is equal 1.

We use following four filter structures for the analysis. These are two cascade structures, one uses direct form sections (second order), and another uses normal form sections, and two structures based on parallel connection of two allpass networks, and in one case the each networks represent a cascade of direct form allpass sections, and in another case a cascade of wave form allpass sections. We use  $L_\infty$ -norm for scaling and we shall put that the rounding is carried out after adders. In the cascade structures the roundoff noise-to-signal ratio depends on pole-zero pairing and ordering of the filter sections. For minimization of this parameter we apply heuristic procedure from [2]. For each of the considered structures we minimize the wordlength coefficient by an algorithm based on variation of initial parameters (VIP-1 [3]).

The 6-th order bandpass filter specifications are the passband = 0.01; the passband ripple  $\leq 3$  dB; the minimum stopband attenuation  $\geq 60$  dB; the squareness ratio (it is a parameter  $\alpha$  in [4]) = 5.

The 10-th order bandpass filter specifications are the passband = 0.005; the passband ripple  $\leq 0.5$  dB; the minimum stopband attenuation  $\geq 40$  dB; the squareness ratio = 1.4.

For these two filter specifications, in almost overall the mentioned above range excepting some area of middle frequencies the cascade filters using the normal form sections and filters based on the wave form allpass sections have considerably best roundoff noise properties in comparison to the cascade filters using the direct form sections and filters based on the direct form allpass sections. The cascade filters using the direct form sections have the best noise properties in the area of middle frequencies. That the cascade filters using the normal form sections have considerably smaller coefficient wordlength in a neighbourhood of very low frequencies in comparison with other three structures.

In that time for the first set specifications all four structures in the field of adjoining to average frequencies have approximately equal coefficient wordlength, and for the second set - the cascade structures have essentially smaller coefficient wordlength in comparison to the filters based on the allpass sections. All these resumes are true both for frequencies 0.0006...0.2 and for 0.4994 ... 0.3 because of a known symmetry.

#### References

1. Renfors M., Zigouris E. Signal processor implementation of digital all-pass filters. // IEEE Trans. 1988. ASSP-36. May. P. 714-728.
2. Mingazin A.T., Zorich A.A. Minimization of roundoff noise in cascade recursive digital filters. // Elektronaya Tekhnika, Ser. 10, 1992, № 1,2. P. 37-43.
3. Mingazin A. Minimization of coefficient wordlength in cascade IIR digital filters. // DSPA-2003. V.1. P. 77-78.
4. Mingazin A.T. Extremal parameters of analog and digital filters. // Elektrosvyaz. 1999. № 1. P. 22-23.

