ОБОБЩЁННЫЕ МАТРИЧНЫЕ РЕКУРРЕНТНЫЕ АЛГОРИТМЫ БЫСТРОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ХАРТЛИ ПО ПРОИЗВОЛЬНОМУ ОСНОВАНИЮ И ПО СМЕШАННОМУ ОСНОВАНИЮ

Злобин С.Л.
ОАО «НПО «Алмаз» им. акад. А. Расплетина

В цифровой обработке сигналов (ЦОС) стало широко использоваться преобразование Хартли [1], тесно связанное с преобразованием Фурье. По определению преобразование Хартли предназначено для обработки массивов действительных чисел, ядро преобразования чисто вещественное.

Дискретное преобразование Хартли (ДПХ), как и ДПФ, применяется в задачах спектрального анализа и цифровой фильтрации [1]. Прямое и обратное преобразования Хартли не имеют различий, они взаимно симметричны. В ДПХ данные обрабатываются только в области вещественных чисел. ДПХ является модификацией ДПФ в плоскости вещественной переменной [1], эти преобразования связаны взаимно однозначными соотношениями.

Весьма эффективно применение ДПХ для обработки изображений [2, 6].

Преобразование Хартли так же, как и преобразование Фурье, имеет свои алгоритмы быстрого преобразования (БПХ), исследование которых представляет существенный интерес.

В [4] и [5] описан матричный рекуррентный алгоритм БПХ по основанию 2. Этот алгоритм отличается следующими особенностями:

1. Входные и выходные отсчёты представляются в естественном порядке адресации (следования). Не нужна специальная операция двоично–инверсной перестановки.
2. Алгоритм допускает использование всего $N/2$ весовых коэффициентов (синусных и косинусных) $C(k)$ и $S(k)$, что экономит программные (аппаратные) ресурсы.
3. Алгоритм нагляден и компактен, отличается регулярностью и простотой организации вычислительного процесса БПХ для массивов произвольной размерности N, где $N = 2^r$.
4. Матричная интерпретация алгоритма и привлечение аппарата арифметики блочных матриц позволяют оперировать непосредственно с блоками данных. Так как блоки можно формировать произвольным образом, то их длина будет однозначно определять уровень параллелизма архитектуры алгоритма.
5. Матричная формализация алгоритма позволяет использовать в качестве графической интерпретации простой и наглядный метод матричных диаграмм.
6. Алгоритм легко программируется на ЭВМ, имеет простую матричную запись.

На практике, однако, размерность обрабатываемого массива данных N часто не является степенью числа 2. Например, число строк телевизионного изображения может составлять 525 или 625. Временные ряды, возникающие в геофизических исследованиях, астрономических наблюдениях, могут содержать произвольное число элементов. Компьютерные изображения также могут иметь произвольные размеры. Тогда приходится исключать некоторое количество элементов, а это потеря информации, либо дополнять исходный массив нулями до ближайшего значения $N = 2^r$, что приводит к лишним затратам вычислительных ресурсов на обработку нулей.

Благодаря применению системного подхода к синтезу структуры матричных алгоритмов по любому основанию, был разработан ряд вычислительных матричных алгоритмов БПХ по различным основаниям $b = 3, 4, 5$ с прореживанием по времени, а также по смешанному основанию [7]. Формулы алгоритмов получены с использованием теоремы сдвига и теоремы о растяжении для ДПХ [1].

Приведённые в [7] матричные алгоритмы БПХ по основаниям 3, 4 и 5 показывают, что с ростом основания алгоритма b матричные формулы становятся всё более сложными, их математический вывод всё более трудным. И, что главное, для каждого основания b, которое может встретиться в процессе вычислений, необходимо в программе или в памяти цифрового процессора обработки сигналов (ЦПОС) иметь свою формульную запись матричного алгоритма БПХ по этому основанию. А на практике часто встречаются смешанные основания, где сомножителями являются числа 11, 13, 17, 19, 23 и т.д. с некоторыми натуральными степенями.

Применение системного подхода к синтезу структуры матричных алгоритмов по любому основанию, анализ матричных алгоритмов БПХ по основаниям 2, 3, 4, 5 [5, 7] позволили вывести общую формульную запись матричного алгоритма БПХ по произвольному основанию b с прореживанием по времени (b — любое натуральное число, большее 1: $b = 2,3,4,5,6,7,\ldots$):

$$\mathbf{RZ}_{1\mathrm{p}}^{\ \mathrm{t}} = \mathbf{A}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{t}} + \sum_{k=1}^{b-1} \mathbf{B}_{\mathrm{kp}}^{\ \mathrm{t}} * \mathbf{CX}_{\mathrm{kp}}^{\ 1} + \sum_{k=1}^{b-1} \underline{\mathbf{B}_{\mathrm{k}}}_{\mathrm{p}}^{\ \mathrm{t}} * \mathbf{SX}_{\mathrm{kp}}^{\ 1} \ ;$$

....

$$\mathbf{RZ}_{\mathrm{jp}}^{\ \mathrm{t}} = \mathbf{A}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{t}} + \sum_{k=1}^{b-1} \mathbf{B}_{\mathrm{kp}}^{\ \mathrm{t}} * \left(\mathbf{CX}_{\mathrm{kp}}^{\ 1} \cdot ca_{i,k} - \mathbf{SX}_{\mathrm{kp}}^{\ 1} \cdot sa_{i,k} \right) + \tag{1}$$

$$+ \sum_{k=1}^{b-1} \underline{\mathbf{B}_{\mathrm{k}}}_{\mathrm{p}}^{\ \mathrm{t}} * \left(\mathbf{SX}_{\mathrm{kp}}^{\ 1} \cdot ca_{i,k} + \mathbf{CX}_{\mathrm{kp}}^{\ 1} \cdot sa_{i,k} \right),$$

где $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}_{\mathrm{k}}$, $\underline{\mathbf{B}_{\mathrm{k}}}$ — входные матрицы, $k = 1,2,3,\ldots,b-1$; $i = 1,2,3,\ldots,b-1$;

$\mathbf{RZ}_1,\ldots,\mathbf{RZ}_{\mathrm{j}}$ — выходные (результирующие) матрицы, $j = 2,3,\ldots,b$; причём $j = i + 1$;

$\mathbf{CX}_{1\mathrm{p}}^{\ \mathrm{t}}, \mathbf{SX}_{1\mathrm{p}}^{\ \mathrm{t}}, \ldots, \mathbf{CX}_{\mathrm{kp}}^{\ \mathrm{t}}, \mathbf{SX}_{\mathrm{kp}}^{\ \mathrm{t}}$ — матрицы весовых коэффициентов, их число всегда составляет $2 \cdot b - 2$; переменная k изменяется в пределах: $k = 1,2,3,\ldots,b-1$;

$\mathbf{CX}_{1\mathrm{p}}^{\ 1}, \mathbf{SX}_{1\mathrm{p}}^{\ 1}, \ldots, \mathbf{CX}_{\mathrm{kp}}^{\ 1}, \mathbf{SX}_{\mathrm{kp}}^{\ 1}$ — первые вектор–столбцы матриц весовых коэффициентов;

$ca_{i,k}$ и $sa_{i,k}$ — элементы двух матриц коэффициентов усиления $\mathbf{CA}$ и $\mathbf{SA}$; например, в формульной записи матричного алгоритма БПХ по основанию 3 коэффициенты усиления будут равны $\pm\sin(\pi/3)$ и $\pm\cos(\pi/3)$; для некоторых оснований алгоритма b матрицы коэффициентов усиления будут состоять только из -1, 0 и 1 — например, для $b = 2$ и $b = 4$;

$p = b^{\mathrm{m}-1}$, $t = b^{\mathrm{r}-\mathrm{m}}$, $m = 1,2,3,\ldots,r$; p и t — размерности матриц на разных итерациях;

r — число итераций; m — номер итерации; N — длина исходного массива, $N = b^{\mathrm{r}}$.

Операция $\mathbf{B}_{\mathrm{kp}}^{\ \mathrm{t}} * \mathbf{CX}_{\mathrm{kp}}^{\ 1}$ — поэлементное (статическое) умножение столбцов матрицы $\mathbf{B}_{\mathrm{k}}$ на вектор–столбец $\mathbf{CX}_{\mathrm{kp}}^{\ 1}$. Матрица $\underline{\mathbf{B}_{\mathrm{k}}}_{\mathrm{p}}^{\ \mathrm{t}}$ — зеркальная (инверсная) матрица, она получена из матрицы $\mathbf{B}_{\mathrm{kp}}^{\ \mathrm{t}}$ путём инверсии строк.

Весовые коэффициенты представляются следующими выражениями:

$$CX_k(l) = \cos(2\pi \cdot k \cdot (l-1)/N); \qquad SX_k(l) = \sin(2\pi \cdot k \cdot (l-1)/N), \tag{2}$$

где $k = 1,2,3,\ldots,b-1$; $l = 1,2,3,\ldots,N/b$.

Элементы $ca_{i,k}$ и $sa_{i,k}$ матриц $\mathbf{CA}$ и $\mathbf{SA}$ вычисляются по формулам:

$$ca_{i,k} = \cos\left[\pi \cdot \left(\frac{2 \cdot i \cdot k}{b} \bmod 2 \right) \right]; \qquad sa_{i,k} = \sin\left[\pi \cdot \left(\frac{2 \cdot i \cdot k}{b} \bmod 2 \right) \right], \tag{3}$$

где $i = 1,2,3,\ldots,b-1$; $k = 1,2,3,\ldots,b-1$. Для основания алгоритма b размерность матриц $\mathbf{CA}$ и $\mathbf{SA}$ равна $(b-1)\times(b-1)$.

Входная действительная последовательность имеет вид строки длиной N, результирующий спектр Хартли представляется в естественном порядке следования в виде вектор–столбца размерностью N. Операция цифро–инверсной перестановки отсутствует. Входная и выходная информация имеют естественный порядок следования. Преобразование осуществляется за $r = \log_b N$ итераций. На каждой итерации выполняется N/b базовых операций алгоритма — «бабочек».

Полученную общую формульную запись матричного алгоритма БПХ (1) можно назвать обобщённым матричным рекуррентным алгоритмом быстрого преобразования Хартли (БПХ) по произвольному основанию b с прореживанием по времени.

Графическая интерпретация обобщённого матричного алгоритма БПХ (1) для основания $b = 4$ приведена на рис. 1 в виде матричных диаграмм.

Для основания алгоритма $b = 2$ матрицы коэффициентов усиления **CA** и **SA** состоят только из одного элемента: $\mathbf{CA} = (-1)$; $\mathbf{SA} = (0)$.

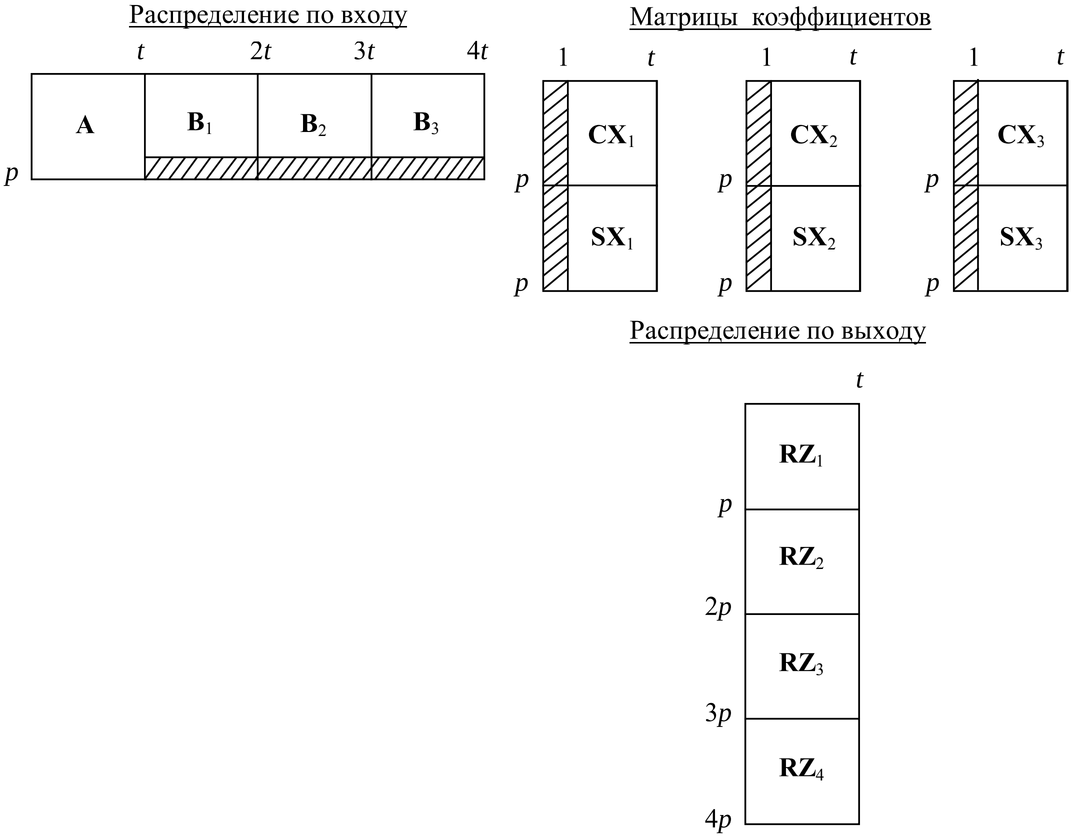

Рис. 1. Матричные диаграммы обобщённого матричного алгоритма БПХ (1)
для основания $b = 4$ с прореживанием по времени.

Для алгоритма по основанию $b = 3$ матрицы **CA** и **SA** уже имеют размерность 2×2:

$$\mathbf{CA} = \begin{pmatrix} -\cos\frac{\pi}{3} & -\cos\frac{\pi}{3} \\ -\cos\frac{\pi}{3} & -\cos\frac{\pi}{3} \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{SA} = \begin{pmatrix} \sin\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3} \\ -\sin\frac{\pi}{3} & \sin\frac{\pi}{3} \end{pmatrix}.$$

Для алгоритма по основанию $b = 4$ размерность матриц **CA** и **SA** равна 3×3:

$$\mathbf{CA} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{SA} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Из формульной записи обобщённого матричного алгоритма БПХ (1) после несложных преобразований можно получить формульную запись матричного алгоритма БПХ по любому конкретному основанию b. После раскрытия математических операций в формулах (1) для оснований $b = 2, 3, 4, 5$ были получены матричный алгоритм БПХ по основанию 2 [5] и матричные алгоритмы БПХ по основаниям 3, 4 и 5 с прореживанием по времени [7].

Общая формульная запись матричного алгоритма БПХ по произвольному основанию b (1) весьма полезна тем, что в памяти программы или ЦПОС нет необходимости хранить матричные формулы алгоритмов БПХ для оснований $b = 2, 3, 4, 5, 6, 7$ и т.д. В процессе вычислений программа встречает конкретное основание алгоритма b и формирует матричную «бабочку» (1) размера, который соответствует величине этого основания. То есть, во время работы для любого основания алгоритма БПХ автоматически формируется матричная «бабочка» необходимого размера. Поскольку в этом случае длина исходного массива N равна произведению нескольких сомножителей b_i с натуральными степенями — $N = b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdot \ldots$, то применяемый алгоритм уже является обобщённым матричным рекуррентным алгоритмом БПХ по смешанному основанию.

Обобщённые матричные алгоритмы БПХ по произвольному основанию b (1) и по смешанному основанию могут быть использованы в цифровой обработке изображений для двумерной фильтрации, для вычисления двумерного ДПХ $H(u,v)$ и двумерного ДПФ $F(u,v)$ посредством выполнения двумерного Q – преобразования с расщепляющимся ядром [2, 6].

Преобразование $Q(u,v)$ вычисляется через БПХ по строкам и столбцам исходного изображения $f(\tau_1,\tau_2)$, размеры которого на практике часто могут быть самыми различными, например, 782×580. Здесь выгодно применить обобщённый матричный алгоритм БПХ по смешанному основанию.

Полученные обобщённые матричные рекуррентные алгоритмы БПХ по произвольному основанию b (1) и по смешанному основанию отличают следующие особенности:

1. Входные и выходные отсчёты представляются в естественном порядке адресации (следования). Нет необходимости в операциях цифро–инверсных перестановок.

2. Натуральные числа b_i, которые входят в качестве сомножителей с некоторыми целыми неотрицательными степенями в смешанное произведение $N = b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdot \ldots$ (N — длина исходного массива) могут быть любыми, не обязательно взаимно–простыми, как, например, в алгоритме Винограда для длинной последовательности [3]. В процессе вычислений для любого конкретного основания b_i алгоритма БПХ автоматически формируется матричная «бабочка» (1) соответствующего размера, и далее вычисления идут согласно формулам (1).

3. Алгоритмы наглядны и компактны, отличаются регулярностью и простотой организации вычислительного процесса БПХ. Матричная формализация алгоритмов позволяет в качестве графической интерпретации использовать простой и наглядный метод матричных диаграмм.

Была составлена специальная программа на языке Mathcad–2001, реализующая в матричном виде обобщённый матричный рекуррентный алгоритм БПХ по смешанному основанию b_i, где b_i — любые натуральные числа, которые входят в качестве сомножителей с любыми натуральными степенями в смешанное произведение $N = b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdot \ldots$ (N — длина исходного массива). В зависимости от числа сомножителей b_i программа автоматически работает согласно формулам (1) как с одним основанием b, так и с несколькими основаниями b_i при различном количестве итераций r_i по каждому основанию.

В заключение отметим, что полученные обобщённые матричные рекуррентные алгоритмы БПХ по произвольному основанию b (1) и по смешанному основанию могут быть эффективно использованы в задачах ЦОС. Эти новые матричные алгоритмы БПХ значительно увеличивают возможности по обработке массивов данных с самыми различными значениями размерностей и приводят к существенной экономии вычислительных ресурсов.

Литература

1. Р.Н. Брейсуэлл, «Преобразование Хартли». Москва, «Мир», 1990 г.

2. Р.Н. Брейсуэлл, О. Бьюнеман, Х. Хао, Дж. Вилласенор, «Быстрое двумерное преобразование Хартли». ТИИЭР, том 74, № 9, сентябрь 1986.

3. Р. Блейхут, «Быстрые алгоритмы цифровой обработки сигналов». Москва, «Мир», 1989.

4. А.Я. Стальной, С.Л. Злобин, А.В. Анищенко. Патент РФ на изобретение: «Процессор для быстрого преобразования Хартли», № 2071221, 6 G 06 F 17/14, 29.06.94 г.

5. С.Л. Злобин, А.Я. Стальной, «Матричный рекуррентный алгоритм быстрого преобразования Хартли с естественным порядком адресации входной и выходной информации». Радиотехника, № 4, апрель 2000 г.

6. С.Л. Злобин, А.Я. Стальной. «Двумерное быстрое преобразование Хартли в цифровой обработке изображений». Доклады 6–ой Международной конференции «Цифровая обработка сигналов и её применение». Том 2. 31 марта–2 апреля 2004 г., стр. 114–116. Труды РНТОРЭС им. А.С. Попова. Москва, Россия, 2004 г.

7. С.Л. Злобин, А.Я. Стальной. «Матричные алгоритмы быстрого преобразования Хартли по различным основаниям, а также по смешанному основанию». Доклады 7–ой Международной конференции «Цифровая обработка сигналов и её применение». Том 1. 16 марта–18 марта 2005 г., стр. 79–81. Труды РНТОРЭС им. А.С. Попова. Москва, Россия, 2005 г.

GENERALIZED MATRIX RECURRENT FAST HARTLEY TRANSFORM ALGORITHMS OF ARBITRARY RADIX AND OF MIXED RADIX

Zlobin S.

«Almaz» Scientific Industrial Corporation named after Academician A. Raspletin

Heads of the report

At present the Hartley transform, closely connected with the Fourier transform, is widely applied in digital signal processing (DSP). By definition, Hartley transform is meant for the processing of the real number arrays, which are often encountered in practice; the kernel of the transform is purely real.

The discrete Hartley transform (DHT), as the discrete Fourier transform (DFT), is applied in the tasks of spectrum analysis and digital filtering. When DHT is applied the data are processed only in the real number region. The direct and the inverse transforms have no distinctions, they are mutually symmetrical. The DHT is the modification of the DFT in the real variable plane. These transforms are bound with mutually unequivocal alignments.

New generalized matrix recurrent FHT algorithms of arbitrary radix b ($b = 2, 3, 4, 5, 6, 7\ldots$) and of mixed radix with time decimation and with natural sequence of input and output information are presented in the report. The obtained algorithms are clear and compact; computation processes of these algorithms are described with the help of the arithmetical apparatus of block matrices. Simple and clear method of matrix diagrams is used as graphic interpretation. The algorithms can be efficiently used in digital signal processing. New matrix FHT algorithms considerably increase the possibilities for the data arrays processing with very various values of dimensions and ensure significant computation economy.