

РАЗРАБОТКА АЛГОРИТМА ИНТЕРПОЛЯЦИИ НА ОСНОВЕ КАСКАДНОГО СОЕДИНЕНИЯ ЦИФРОВОГО РЕКУРСИВНОГО И АНАЛОГОВОГО ФИЛЬТРА НИЗКОГО ПОРЯДКА

Кириллов С.Н., Бахурин С.А.

Рязанская государственная радиотехническая академия
Тел. (0912) 36-82-44, e-mail: snk@rinfotels.ru, bahurin@mail.ru

Введение. Применение алгоритмов цифровой обработки сигналов позволяет получить приближенные к потенциально возможным характеристики устройств обработки, при этом часто стоит задача обратного преобразования дискретного сигнала в непрерывную форму. Использование для этой цели аналоговых восстанавливающих фильтров нижних частот высокого порядка приводит к дополнительным искажениям восстанавливаемого непрерывного сигнала из-за неравномерности амплитудно-частотной характеристики фильтра в полосе пропускания, в частности, эффекта Гиббса. Таким образом, потенциально возможные характеристики алгоритмов цифровой обработки сигналов могут быть ослаблены на этапе цифроаналогового преобразования.

Целью работы является разработка восстанавливающих фильтров в устройствах интерполяции в виде каскадного соединения рекурсивного цифрового и аналогового фильтра, позволяющих получить потенциально возможную точность восстановления, а также снизить требования к аналоговому фильтру нижних частот.

Разработка устройства интерполяции. Пусть дан исходный финитный во времени сигнал $u(t)$, $t \in T$ и его дискретные отсчеты $U_i = u(t_i), i = 1..N$. Дискретизацию исходного сигнала $u(t)$ можно осуществлять на основе теоремы В.А. Котельникова [1], при ограничении спектра сигнала по уровню 0.95..0.99 энергии. Тогда восстановленный непрерывный сигнал $\tilde{u}(t)$ можно представить как

$$\tilde{u}(t) = \sum_{i=1}^N U_i \cdot x(t - t_i), \quad (1)$$

где $x(t)$ - синтезирующая функция, которую можно трактовать как импульсную характеристику восстанавливающего фильтра. В качестве синтезирующей функции могут использоваться функции $\text{sinc}(t) = \sin(t)/t$, рекомендованные В.А. Котельниковым [1], различные сплайны [2], атомарные функции $\text{up}(t)$ [3], а также функции вида $\text{sin}w(t) = w(t)\text{sinc}(t)$, полученные из решения задачи интерполяции по критерию минимума среднего квадрата ошибки при наложении дополнительных ограничений на финитность реализации исходного сигнала и реализуемость устройств обработки [4]. Спектр Фурье $S(\omega)$ дискретного сигнала $U_i, i = 1..N$ является периодическим с периодом $\Delta\omega = 4\pi/\Delta t$, где Δt - интервал дискретизации. Для финитного во времени сигнала $u(t)$ применение синтезирующих функций вида $\text{sinc}(t)$ приводит к ошибкам восстановления за счет наложения спектральных составляющих и усечения по времени синтезирующей функции [1]. Поэтому для уменьшения ошибок усечения и наложения целесообразно применять сплайны, атомарные функции $\text{up}(t)$ и функции вида $\text{sin}w(t)$, имеющие меньший уровень боковых лепестков, чем у функции $\text{sinc}(t) = \sin(t)/t$, однако их реализация в виде аналоговых фильтров требует высокой точности реализации частотных характеристик, что возможно лишь при значительном порядке фильтра для фиксированной частоты дискретизации.

Продискретизируем сигнал $\tilde{u}(t)$ из выражения (1) в моменты $t_k, k = 1..M$, где $M = K_e \cdot N$, K_e - коэффициент увеличения частоты дискретизации (коэффициент экспандирования), тогда получим:

$$\tilde{U}_k = \sum_{i=1}^N U_i \cdot x(t_k - t_i), k = 1..M. \quad (2)$$

Линейная свертка (2) может быть осуществлена при использовании цифрового нерекурсивного фильтра с импульсной характеристикой соответствующей $x(t_k)$ [5]. Кроме фильтра необходимо иметь наличие экспандера. Таким образом, на первом этапе, при увеличенной частоте дискретизации осуществляется цифровая фильтрация, а затем используется более простой аналоговый фильтр. На рисунке 1 показана структурная схема устройства восстановления в виде каскадного соединения цифрового нерекурсивного и аналогового фильтров при коэффициенте экспандирования $K_e = 2$, широко применяемых при цифроаналоговом преобразовании аудиозаписей с цифровых носителей [5]. Отсутствие некоторых отводов в линии задержки цифрового фильтра соответствует нулевым значениям импульсной

характеристики фильтра $x(t_k - t_i)$, а также $x(0)=1$ соответствует центральному отводу без усилителя. Регистр 1 и регистр 2 образуют входной стек обработки, а регистр 3 и регистр 4 соответственно выходной стек, после чего значения из регистра 4 подаются на аналоговый фильтр АФ.

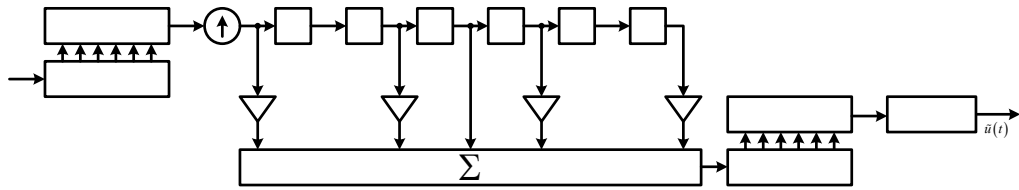


Рис. 1

При высоких порядках цифрового фильтра требуется хранить большое количество коэффициентов, что является недостатком алгоритма интерполяции, реализуемого на основе нерекурсивного фильтра.

Для получения коэффициента экспандирования $K_e > 2$ возможно использовать рекурсивный цифровой восстанавливающий фильтр. В этом случае коэффициент экспандирования K_e должен быть равен степени 2, для возможности рекурсивного его увеличения. Структурная схема устройства обработки при использовании каскадного соединения цифрового рекурсивного и аналогового фильтров представлена на рисунке 2. Регистры 1, 2, 3 и 4 как и в предыдущем случае представляют собой входной и выходной стеки соответственно. Регистр 3 дополнительно имеет флаги заполнения, поскольку при итерационной процедуре фильтрации его размер должен динамически меняться. Вначале заполняется входной стек и происходит первая итерация при $K_e = 2$, которая приводит к заполнению регистра 3.

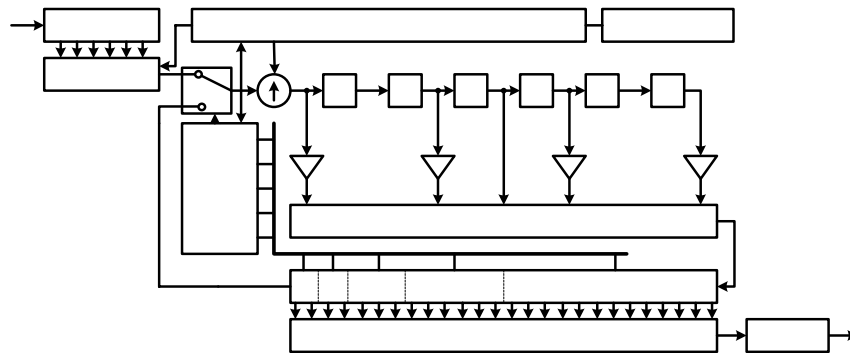


Рис. 2

В результате заполнения, регистр 3 выставляет флаги обозначающие окончание соответствующей итерации. На первой итерации выставляется флаг окончания процедуры интерполяции при $K_e = 2$ и счетчик-управитель отключает регистр 2 и подает на вход фильтра уже восстановленный сигнал с коэффициентом $K_e = 2$ из регистра 3. Управляемый делитель частоты увеличивает частоту дискретизации в 2 раза и процедура повторяется, но уже с коэффициентом экспандирования $K_e = 4$ и т.д.. После того как регистр 3 полностью заполнен, весь восстановленный сигнал загружается в регистр 4 и последовательно подается на вход аналогового фильтра АФ. При появлении на входе регистра 1 нового отсчета восстанавливаемого сигнала вся процедура повторяется с первого этапа. Таким образом появление одного отсчета на входе приводит к появлению $K_e = 32$ отсчетов на выходе, при порядке фильтра равному порядку нерекурсивного восстанавливающего фильтра, а увеличение количества итераций n позволяет получить значения коэффициента экспандирования частоты $K_e = 2^n$.

Экспериментальные исследования проводились при восстановлении полигармонического сигнала

$$u(t) = \sum_{i=1}^N A_i \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_i \cdot t + \varphi_i), \quad t \in T, \quad (3)$$

где A_i – амплитуды гармоник, равномерно распределены на интервале $[0, 1]$, f_i – частоты гармоник, равномерно распределены на интервале $[0, 0.5]$ Гц, φ_i – начальная фаза гармоник, равномерно распределена на интервале $[0, 2\pi]$ рад, $N = 10$ – количество гармоник сигнала, в

эксперименте. Такая модель исходного сигнала является наиболее общей, поскольку охватывает весь заданный диапазон частот и амплитуд спектральных составляющих сигнала. Расчет параметров фильтра производился при фиксированной, нормированной к энергии, среднеквадратической ошибке восстановления равной 0,03. В качестве синтезирующих функций были выбраны рекомендованные в [4] финитные во времени функции вида:

$$\text{sinw}(t) = \begin{cases} \left(\frac{\sum_{k=1}^2 a_k \cdot t^{2k}}{1 + \sum_{m=1}^3 b_m \cdot t^{2m}} \right) \cdot \text{sinc}(t), & t \in T; \\ 0, & t \notin T, \end{cases} \quad (4)$$

где a_k и b_m - коэффициенты полиномов выбирались исходя из требуемой ошибки восстановления и краевых условий:

$$\text{sinw}(T) = 0, \quad d \text{sinw}(t)/dt \Big|_{t=T} = 0. \quad (5)$$

В таблице 1 приведены значения порядка аналогового фильтра P от коэффициента подавления в полосе заграждения K_{nod} , при коэффициенте неравномерности в полосе пропускания 0.1 дБ и коэффициенте экспандирования цифрового рекурсивного фильтра $K_e = 32$.

Таблица 1

K_{nod} , дБ	20	40	60	80	100
P	1	2	2	2	3

Из анализа таблицы 1 следует, что использование простого аналогового фильтра второго порядка позволяет получить коэффициент подавления в полосе заграждения до 80 дБ.

В таблице 2 приведены значения порядка аналогового фильтра P от коэффициента экспандирования цифрового рекурсивного фильтра K_e при коэффициенте подавления в полосе заграждения $K_{nod} = 60$ дБ, и коэффициенте неравномерности в полосе пропускания 0.1 дБ.

Таблица 2

K_e	1	2	4	8	16	32
P	27	4	3	2	2	2

Как следует из анализа таблицы 2, в случае отсутствия цифрового фильтра при $K_e = 1$, требуется аналоговый фильтр 27-го порядка, в то время как использование простейшего нерекурсивного цифрового фильтра при $K_e = 2$ позволяет уменьшить порядок аналогового фильтра до четырех, а использование рекурсивного цифрового фильтра при коэффициенте экспандирования $K_e \geq 8$, дает возможность максимального сокращения порядка аналогового фильтра до двух.

На рис.3 представлены частотные характеристики аналогового фильтра 27-го порядка без использования цифрового фильтра (рис.3а), а также частотные характеристики цифрового рекурсивного фильтра при $K_e = 32$ и аналогового фильтра второго порядка (рис.3б).

Как следует из анализа рис.3 применение цифрового рекурсивного фильтра позволяет существенно снизить требования к характеристикам аналогового фильтра.

Кроме того, можно показать, использование рекурсивного фильтра при $K_e = 32$ на основе фильтра 13-го порядка, соответствует использованию нерекурсивного фильтра 208 порядка.

Из экспериментальных исследований было установлено, что динамический диапазон коэффициентов цифрового рекурсивного фильтра не превышает 100, а значит, фильтр может быть реализован на основе восьмиразрядного вычислительного устройства с фиксированной точкой.

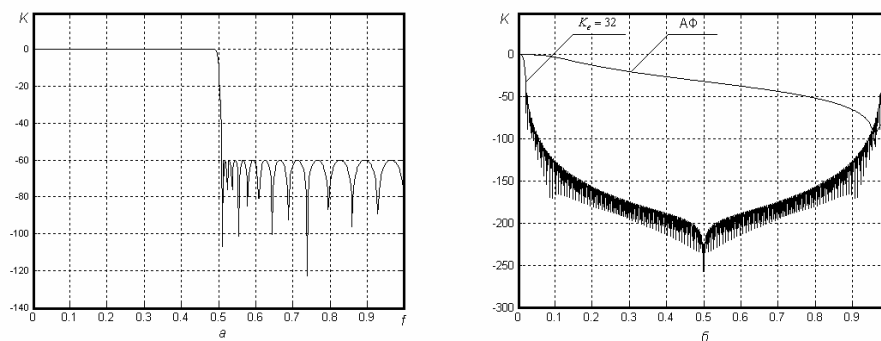


Рис.3

Выводы. Таким образом, был произведен анализ реализации устройства интерполяции на основе каскадного соединения цифрового рекурсивного и аналогового фильтра низкого порядка при нормированной среднеквадратической ошибке равной 0.03 и синтезирующей функции вида (4), показывающий, что можно:

1. Снизить порядок аналогового фильтра с 27 до 2 при фиксированной ошибке восстановления полигармонического сигнала равной 0.03.
2. Обеспечить коэффициент подавления в полосе заграждения аналогового фильтра 2-го порядка до 80дБ при использовании рекурсивного фильтра с коэффициентом экспандирования $K_e = 32$.
3. Сократить порядок рекурсивного фильтра по сравнению с известными нерекурсивным фильтром с 208 до 13, тем самым сократить вычислительные затраты и объем памяти необходимый для обработки сигналов.
4. Произвести реализацию цифрового фильтра при использовании вычислительного устройства с фиксированной точкой.

Библиографический список

1. Джерри А.Дж. Теорема отсчетов Шеннона, ее различные обобщения и приложения // ТИИЭР, 1977. Т. 65. № 11. С 53 – 89.
2. Василенко В.А Сплайн-функции: теория, алгоритмы, программы. – Новосибирск: Наука, 1983. – 289 с.
3. Басараб М.А., Зелкин Е.Г., Кравченко В.Ф., Яковлев В.П. Аппроксимация финитными функциями и теорема Уиттекера-Котельникова-Шеннона в цифровой обработке сигналов // Успехи современной радиоэлектроники, 2003. № 9. С.3–36.
4. Кириллов С.Н., Зорин С.В., Бахурин С.А. Синтез оптимальных скейлинг и интерполирующих функций при ограничении на реализуемость устройств обработки // Труды Российского научно-технического общества радиотехники, электроники и связи имени А.С.Попова: Серия ЦОС и ее применение. Вып. 4. Т. 1. С. 30-32.
5. Рабинер Л.Р., Шафер Р.В. Цифровая обработка речевых сигналов. – М.: Радио и связь, 1981. – 496 с.

DEVELOPMENT OF ALGORITHM INTERPOLATION ON THE BASIS OF CASCADE CONNECTION DIGITAL AND ANALOG FILTER LOW ORDER

Kirillov S., Bahurin S.

The Ryazan state radio engineering academy
Ph. (4912) 36-82-44, e-mail: snk@rinfotels.ru , bahurin@mail.ru

The application of algorithms of digital processing of signals allows to receive approached to the potentially possible characteristic of devices of processing, thus frequently there is a task of return transformation of a discrete signal in the continuous form. Use for this purpose of analog restoring filters of the bottom frequencies of the high order results in additional distortions of a restored continuous signal because of non-uniformity is peak - frequency the characteristics of the filter in a passband, in particular, effect Gibbs. In addition such filters are expensive, do not give opportunities to change frequency discrimination, and also bring in the large delay at restoration. Thus, potentially possible characteristics of algorithms of digital processing of signals can be weakened at a stage digital-analog transformation. The algorithms of interpolation are known on the basis of various synthesizing functions requiring presence of the computing device with a floating point, and also it is possible to ensure plenties of computing operations, that not always.

The purpose of work is the development of restoring filters in devices of interpolation as cascade connection of the digital and analog filter allowing to receive potentially possible accuracy of restoration, and also to lower the requirements to the analog filter of the bottom frequencies.

As a result of work the analysis of realization of the device of interpolation was made on the basis of cascade connection digital рекурсивного and analog filter of the low order at normalized to a mistake of equal 0.03 and synthesizing function of a kind $\sin w(t)$, showing, that is possible to lower the order of the analog filter with 27 up to 2 at the fixed mistake of restoration poligarmoniques of a signal equal 0.03. The opportunity of reception of factor of suppression in a strip of an obstacle of the analog filter of the 2-nd order up to 80ДБ is proved at use рекурсивного of the filter with factor $K_e = 32$. Experimentally is established, that the application the filter allows to lower the order of the filter in comparison with known the filter with 208 up to 13, thus to reduce computing expenses and volume of memory necessary for processing signals. The designed dynamic range of factors of the filter does not exceed 100, that proves an opportunity of realization of the digital filter at use of the computing device with the fixed point.

◆