ОЦЕНКА ПЕРИОДА СЛЕДОВАНИЯ ИМПУЛЬСОВ ДЛЯ ПРОПАДАЮЩЕГО СИГНАЛА МЕТОДОМ ПОЛНЫХ ДОСТАТОЧНЫХ СТАТИСТИК

Говорухина А.Д.[1,2], Жучков К.Н[1]., Хоружий С.Г.[1]

[1)] ФГУП «ГКБ «Связь», пр. Соколова, 96, 344010, г. Ростов-на-Дону, Россия
[2)] Ростовский госуниверситет, механико-математический факультет, ул. Зорге, 5, 344090, Ростов-на-Дону, Россия, agovorukhina@yandex.ru, konst_z@mail.ru

Реферат. На примере модели последовательности квазипрямоугольных импульсов проиллюстрирован подход к оценке их периода следования при использовании методологии полных достаточных статистик (ПДС). Представлено аналитическое выражение для периода следования импульсов в случае пропадающего сигнала. Показано, что при конечном и небольшом значении объема выборки (n~20) в интервале рабочих отношений сигнал/шум 0-12 дБ относительная среднеквадратичная погрешность оценки периода следования импульсов методами ПДС оказывается существенно меньше погрешности традиционной оценки, которая является лишь асимптотически эффективной.

Введение.

Вопросы оценки параметров сигналов на фоне помех являются актуальными для решения задач цифровой обработки сигналов. Причем эта актуальность повышается в случаях, когда из сигнала удается извлечь лишь техническую составляющую информации, при этом ее семантическая составляющая остается недоступной. Синтез оптимальных алгоритмов для эффективной оценки сигнальных параметров при этом практически всегда выполняется сугубо эвристически.

В условиях малой априорной определенности в исходных данных делаются попытки решить задачу оценки эффективности предлагаемого алгоритма при помощи классического байесовского критерия [1]. Однако сложность таких попыток связана с требованием знания априорных вероятностей наличия и отсутствия сигнала в наблюдаемой выборке, функций распределения вероятностей и потерь.

В отсутствие априорных сведений как о величине потерь, так и о вероятностях наличия и отсутствия сигнала в исходной выборке иногда применяют критерий максимального правдоподобия [2], который для задач оценивания параметров сигнала предполагает, что функция потерь является константой, а структура алгоритмов в этом случае зависит от вектора мешающих параметров, т.е. синтезированные алгоритмы не являются структурно устойчивыми. Применительно к задачам оценивания параметров сигналов метод максимального правдоподобия оказался наиболее эффективным: неизвестные мешающие параметры включают в состав оцениваемых параметров и находят оценки всех, в том числе и несущественных для данной задачи, параметров. Более того, в математической статистике показано, что существование оценки максимального правдоподобия (ОМП) является необходимым признаком существования наиболее эффективной оценки, причем в случае существования последней гарантируется ее совпадение с оценкой максимального правдоподобия.

Существует перспективная методология поиска эффективных алгоритмов оценивания основанная на следующем. В радиотехнических приложениях распределения выборок и наблюдаемых технических процессов часто обладают полными достаточными статистиками (ПДС), что создает предпосылки для применения теоремы Рао-Блеквелла-Лемана-Шеффе и ее следствий [3-5] при отыскании эффективных оценок параметров сигналов. Применение методологии ПДС для отыскания эффективной оценки периода следования импульсов на фоне шумов и помех в условиях параметрической априорной неопределенности является актуальной научной проблемой, и ее решение имеет прямую практическую применимость.

Постановка задачи и методы исследования.

Рассмотрим процесс x(t), представляющий собой аддитивную смесь сигнала и шума:

$$x(t) = A_m\, s(t) + n(t), \qquad (1)$$

где A_m – амплитуда сигнала, неравная нулю в интервал времени $[t_k^+, t_k^-]$, $s(t)$ – нормированный по амплитуде сигнал, $n(t)$ – дифференцируемый стационарный гауссовый шум, характеризуемый дисперсией σ^2.. В работах [3,4] показано, как методом ПДС оценить период следования импульсов в данном случае. Вместе с тем, в случае, когда мы имеем дело с пропадающим сигналом, параметры появления которого неизвестны априори, задача определения периода следования становится сложнее.

Оценим период следования импульсов, T, с помощью статистик $\mathbf{t}^+ = \{t_0^+, \ldots, t_n^+\}$ и $\mathbf{t}^- = \{t_0^-, \ldots, t_n^-\}$, где t_k^+ время пересечения порогового уровня передним фронтом k-го обнаруженного импульса процесса x(t), а t_k^- – соответственно задним фронтом. Случайные величины t_k^+ и t_k^- можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} t_k^+ &= t_{0k}^+ + \Delta t_{0k}^+ = t_{00}^+ + i_k T + \Delta t_{0k}^+, \qquad k = 0,1,2,\ldots, \\ t_k^- &= t_{0k}^- + \Delta t_{0k}^- = t_{00}^+ + i_k T + T/\nu + \Delta t_{0k}^-, \quad k = 0,1,2,\ldots. \end{aligned} \qquad (2)$$

Здесь t_{0k}^{+} и t_{0k}^{-} – время пересечения уровня передним и задним фронтом импульса сигнала s(t), Δt_{0k}^{+} и Δt_{0k}^{-} – малые случайные добавки, обусловленные действием шума n(t), t_{00}^{+} – первое пересечение уровня H, i_k – номер обнаруженного k-го импульса, v – скважность.

Найдем оценку периода следования импульсов методом ПДС. В основе этого метода лежит теорема о единственности эффективной оценки [3,5], являющаяся следствием из теоремы Рао-Блеквелла-Лемана-Шеффе. Согласно теореме о единственности эффективной оценки, если **Y** – полная достаточная статистика, и существует представление искомого параметра в виде линейной комбинации моментов разного порядка статистики **Y**, в нашем случае:

$$T = \sum_{i=1}^{M}\sum_{k=0}^{N} a_{ik} M\left(Y_i^k\right), \tag{3}$$

то единственная эффективная оценка параметра принимает следующий вид:

$$\hat{T} = \sum_{i=1}^{M}\sum_{k=0}^{N} a_{ik} Y_i^k . \tag{4}$$

Здесь M – размерность полной достаточной статистики, N – максимальный номер порядка момента. Применим эту теорему к нашей задаче. Для этого рассмотрим совместную плотность распределения вероятностей выборочных векторов $\boldsymbol{t}^{+}$, $\boldsymbol{t}^{-}$ и найдем достаточную статистику **Y**, убедимся в ее полноте с помощью теоремы о полноте [3], вычислим математическое ожидание статистики **Y** и получим систему линейных уравнений относительно неизвестных параметров процесса x(t). Далее решим полученную систему методом Крамера и получим выражение периода следования импульсов, T, через математическое ожидание статистики **Y**. Теперь можно применить теорему и получить единственную эффективную оценку периода следования импульсов. В нашем случае она будет выглядеть следующим образом:

$$\hat{T} = \frac{2(n+1)\left(\sum_{k=0}^{n} i_k t_k^{+} + \left(i_k + \frac{1}{v}\right)t_k^{-}\right) - \left(2\sum_{k=0}^{n} i_k + \frac{n+1}{v}\right)\left(\sum_{k=0}^{n} t_k^{+} + t_k^{-}\right)}{4(n+1)\sum_{k=0}^{n} i_k^2 + \frac{(n+1)^2}{v^2} - 4\left(\sum_{k=0}^{n} i_k\right)^2} \tag{5}$$

Информацию о виде совместной плотности распределения вероятностей выборочных векторов $\boldsymbol{t}^{+}$, $\boldsymbol{t}^{-}$ можно найти в работе [6].

Приняв во внимание, что D{ t_i^{+} }=D{ t_i^{-} }$=1\big/\left[qs'(t_{00}^{+})\right]^2$, и вычислив $s'(t_{00}^{+})$, пользуясь аппроксимацией формы импульса, приведенной в работе [7], и предполагая, что $s'(t_{00})$ принимает максимальное значение, получим относительную погрешность метода ПДС:

$$\delta_1 = \frac{\sqrt{D(\hat{T})}}{T} = \frac{\sqrt{2e(n+1)\left(4(n+1)\sum_{k=0}^{n} i_k^2 + 2\frac{(n+1)^2}{v^2} + \left(2\sum_{k=0}^{n} i_k + \frac{n+1}{v}\right)^2\right)(k-1)}}{\sqrt{\pi}\left(4(n+1)\sum_{k=0}^{n} i_k^2 + \frac{(n+1)^2}{v^2} - 4\left(\sum_{k=0}^{n} i_k\right)\right) qv\kappa}, \tag{6}$$

где $\kappa = \tau_0/\tau_1$ – коэффициент прямоугольности импульса, q – отношение сигнал/шум.

Оценка периода следования импульсов при использовании традиционного метода усреднения без учета информации о функции распределения и его относительная погрешность [4] выглядят следующим образом:

$$\tilde{T} = \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{t_k^{+} - t_{k-1}^{+}}{i_k - i_{k-1}} + \frac{t_k^{-} - t_{k-1}^{-}}{i_k - i_{k-1}}\right), \quad \delta_0 = \frac{\sqrt{D(\tilde{T})}}{T} = \frac{1}{2\sqrt{2}\pi v q n} \tag{7}$$

Результаты численного моделирования.

Выражения (6) и (7) позволяют теоретически оценить энергетические выигрыш метода ПДС по сравнению с традиционным методом усреднения при решении задачи оценки периода следования импульсов для пропадающего сигнала. Вместе с тем, для проверки таких оценок было проведено численное моделирование в среде МАТЛАБ. С этой целью была сгенерирована последовательность импульсов на фоне аддитивного белого гауссовского шума с внутрииимпульсной четырехпозиционной фазовой манипуляцией. Порядок появления импульса в заданной временной позиции и его несущая частота в полосе приема определялись генератором псевдослучайной последовательности.

Таким образом, после генерации сигнала, к полученной реализации были применены два альтернативных алгоритма оценки периода следования импульсов: на основе методов ПДС (6) и традиционных методов усреднения (7). Количество импульсов в реализации, n, варьировалось в пределах от 10 до 50, а отношение сигнал/шум, q, в диапазоне от 6 до 22 дБ.

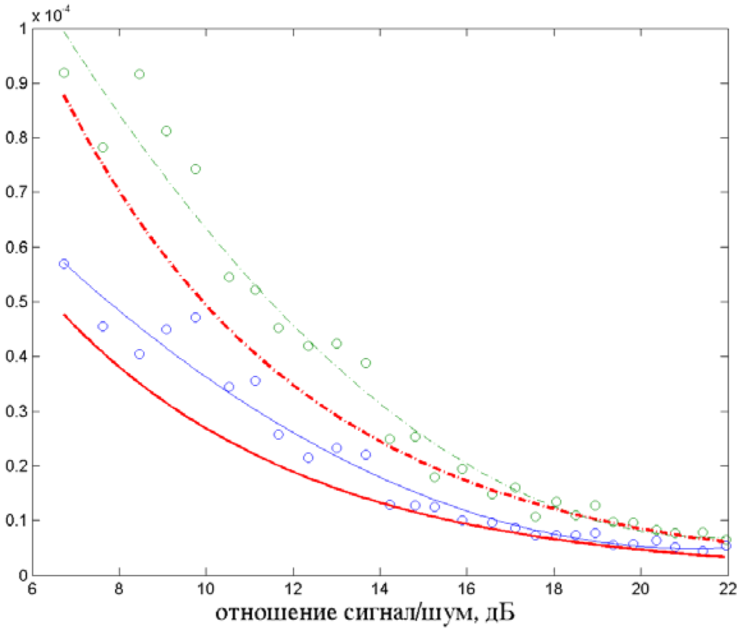

Рис. 1. Относительные погрешности измерения периода следования импульсов - пунктирным линиям соответствует традиционный метод усреднения, сплошным – ПДС метод, жирным – погрешности, вычисленные по формулам (6), (7), тонким – результаты численного моделирования.

Результаты оценки для n=16 в зависимости от q приведены на Рис.1. Представлены относительные погрешности двух альтернативных алгоритмов, причем пунктирным линиям соответствует традиционный метод усреднения, сплошным – ПДС метод, жирным – погрешности, вычисленные по формулам (6), (7), тонким – результаты численного моделирования. Легко видеть, что энергетический выигрыш алгоритма с использованием метода ПДС составляет величину более 2 дБ на интервале q до 12 дБ, и с возрастанием отношения сигнал/шум разница сокращается до 1 дБ, при этом сохраняется асимптотическое стремление оценки традиционного метода усреднений к единственной эффективной оценке при $q \to \infty$.

Дополнительно численное моделирование продемонстрировало устойчивость алгоритма оценки периода следования импульсов с использованием методологии ПДС по отношению к вариациям порогового уровня в широких пределах (до 10 дБ). При той же вариации оценка, синтезированная на базе традиционных методов усреднения, устойчивой не является.

Заключение.

На примере модели последовательности пропадающих по псевдослучайному закону квазипрямоугольных импульсов проиллюстрирован подход к оценке их периода следования с учетом скважности и коэффициента прямоугольности импульсов. Представлено аналитическое выражение для периода следования импульсов.

Показано, что при конечном и небольшом значении объема выборки (n=16) в интервале рабочих отношений сигнал/шум 0-12 дБ относительная среднеквадратичная погрешность оценки периода следования импульсов методами ПДС оказывается существенно меньше погрешности традиционной оценки, которая является лишь асимптотически эффективной

Литература

1. Ван Трис Г. Теория обнаружения, оценок и модуляции. Т.1. М.: Сов. радио, 1972.
2. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники Т. 2. М.: Сов. радио, 1975.
3. Жучков К.Н., Говорухина А.Д. Оценка периода следования импульсов с использованием методов полных достаточных статистик. // Радиоконтроль, 2005 г., № 8, с.47-63.
4. Богданович В.А., Вострецов А. Г. Теория устойчивого обнаружения, различения и оценивания сигналов. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003.
5. Kay S.M. Fundamentals of Statistical Signal Processing: Estimation Theory. - NJ.: Prentice Hall PTR, 1985.
6. Тихонов В.И. Статистическая радиотехника. – М.: Радио и связь, 1982.
7. Трифонов А.П., Беспалова М.Б. Квазиправдоподобная оценка периода следования видеоимпульсов. // Радиоэлектроника, 2003 г., № 11, с. 17-25.

THE ESTIMATION OF PULSES PERIODICITY FOR DISAPPEARED SIGNAL USING FULL SUFFICIENT STATISTIC TECHNIQUE

Govorukhina A. [1,2], Zhuchkov K.[1], Khoroughij S.[1]

[1]FGUP "GKB "Sviaz", 96, Sokolov av., 344010, Rostov-on-Don, Russia
[2]Rostov State University, mechanics and mathematics department, 5, Zorge str., 344090, Rostov-on-Don, Russia
agovorukhina@yandex.ru, konst_z@mail.ru

The solution of parameter of signal in noise estimation problem is high actuality in digital signal processing. If information on signal consists from technical components only (if semantic components are inaccessible) that this actuality increases.

If a priori ignorance about losses value and probability distribution function presents in signal samples that criteria of maximal plausibility [1] can be applied. For signal parameters estimation problem according the criteria the loss function is constant. Synthesized by this criteria algorithms contains the structure instability because the structure of the algorithms depends on vector of noise parameters.

For signal parameters estimation problem the method of maximal plausibility is most effective. In order to estimate signal parameters unknown noise parameters are added to vector of estimated signal parameters.

In mathematical statistic is shown that estimation of maximal plausibility existence is necessary for existence of effective estimation. If effective estimation exists that one and estimation of maximal plausibility are congruent.

The perspective technique of search of effective estimation algorithms is described in [2-4]. It is based on the fact, that in radio technical applications the samples and observed processes distribution distinguished by full sufficient statistic. It is means that Rao-Blackwell-Lehmann-Scheffe theorem and consequence is applicable method for signal parameters effective estimation search. Using full sufficient statistic technique for pulses periodicity effective estimation search in digital signal processing is actual scientific problem and it applied in practice.

The application of full sufficient statistic technique to estimation of pulses periodicity taken into account duty off factor and pulse rectangularity coefficient is illustrated for example of sequence of disappeared pulse on pseudo-random rule pattern.

The analytic formula for pulses periodicity is presented.

It is shown that for small samples value (n=16) in work signal/noise ratio interval 0-12 dB the difference between standard deviations of asymptotic effective traditional estimation of pulses periodicity and estimation, which obtained using full sufficient statistic technique, consists value more 2 dB.

Reference

1. Levin B.R. Theoreticheskie osnovi statiaticheskoy radiotechniki.V. 2. M.: Sovetskoe Radio, 1975.
2. Zhuchkov K.N., Govorukhina A. D. Ocenka perioda sledovaniya impulsov s ispolsovaniem metodov polnikh dostatochnih statistic // Radiocontrol, 2005 ., № 8, pp.47-63.
3. Bogdanovich V.A., Vostrecov A.G. Theoriya ustoychivogo obnaruzheniya, razlicheniya I ocenivaniya signalov. – M.: Physmathlit, 2003.
4. Kay S.M. Fundamentals of Statistical Signal Processing: Estimation Theory. - NJ.: Prentice Hall PTR, 1985.