

## ВЫБОР ОПТИМАЛЬНОГО РАЗНОСА ЧАСТОТ И ВРЕМЕНИ НАКОПЛЕНИЯ В АНАЛИЗАТОРАХ СПЕКТРА НА ОСНОВЕ АЛГОРИТМА ГЕРЦЕЛЯ

Орешкин Б.Н.<sup>1</sup>, Кирпичников А.П.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Московский Авиационный Институт (Государственный Технический Университет)

<sup>2</sup>Институт Проблем Управления Российской Академии Наук

e-mail: [info@autex.ru](mailto:info@autex.ru)

**Аннотация** – предложен и экспериментально обоснован метод выбора оптимального времени накопления и разноса частот в анализаторах спектра на основе алгоритма Герцеля в системах с многочастотным кодированием. Применение предложенного метода при синтезе оптимальных систем с многочастотным кодированием позволяет получить максимальное подавление сигнала соседнего канала.

### I. ВВЕДЕНИЕ

Применение алгоритма Герцеля для вычисления Дискретного Преобразования Фурье (ДПФ) получило значительное внимание в литературе [1-4]. Это связано с тем, что в ряде приложений нет необходимости в вычислении всех коэффициентов ДПФ. Поэтому применение алгоритма Герцеля вместо Быстрого Преобразования Фурье (БПФ) при анализе спектра сигналов с многочастотным кодированием значительно снижает вычислительные затраты при реализации анализатора спектра. Такое утверждение справедливо, если анализируемый сигнал состоит из синусоидальных компонент с заранее известными частотами, а количество таких компонент не превышает  $\log_2 N$ , где  $N$  – количество отсчетов в анализируемой выборке [1]. Несмотря на широкое практическое применение алгоритма Герцеля, в литературе уделено мало внимания выбору оптимального разноса частот и времени накопления (или, что то же самое, выбору оптимального количества отсчетов  $N$ ) при детектировании таких сигналов. Это связано прежде всего с тем, что алгоритм Герцеля был предложен в качестве альтернативного метода вычисления ДПФ и его основной характеристикой автоматически стала разрешающая способность по частоте  $\Delta\omega$ . В алгоритме ДПФ, в свою очередь, разрешающая способность по частоте связана с длиной анализируемого временного интервала  $N$  следующим образом:  $\Delta\omega = 1/N$ . При этом считается, что с ростом спектрального разрешения (уменьшением  $\Delta\omega$ ) растет и подавление соседних частотных каналов. Такой подход к оценке свойств анализаторов спектра на основе БПФ справедлив в случае применения весовой обработки входной последовательности анализатора временным окном. Оконная обработка входной последовательности приводит к ослаблению эффекта Гиббса (явления просачивания составляющих из соседних элементов частотного разрешения по боковым лепесткам фильтра БПФ). Однако алгоритм Герцеля имеет рекурсивную структуру и циркуляция обработанных окном входных отсчетов в этом алгоритме приводит к искажению исходной формы окна и неправильным результатам обработки. В связи с изложенным предлагается решение задачи выбора оптимального разноса частот и длины анализируемой выборки с точки зрения максимального подавления соседних частотных каналов.

### II. ВЫБОР ОПТИМАЛЬНОГО РАЗНОСА ЧАСТОТ И ВРЕМЕНИ НАКОПЛЕНИЯ

Алгоритм Герцеля имеет вид, показанный на Рис. 1 [1,4]. Его функционирование описывается следующими уравнениями:

$$a_k = 2 \cos(2\pi f_k / Fs), \quad y(n) = x(n) + a_k y(n-1) - y(n-2),$$

$$y(n-2) = y(n-1), \quad y(n-1) = y(n),$$

$$P_k(n) = y_k^2(n-1) + y_k^2(n-2) - a_k y_k(n-1) y_k(n-2), \quad (1)$$

где  $k = 1..M$  – номер частотного канала,  $n = 1..N$  – номер отсчета,  $P_k(n)$  – оценка Спектральной Плотности Мощности (СПМ) на частоте  $f_k$   $k$ -ого канала.

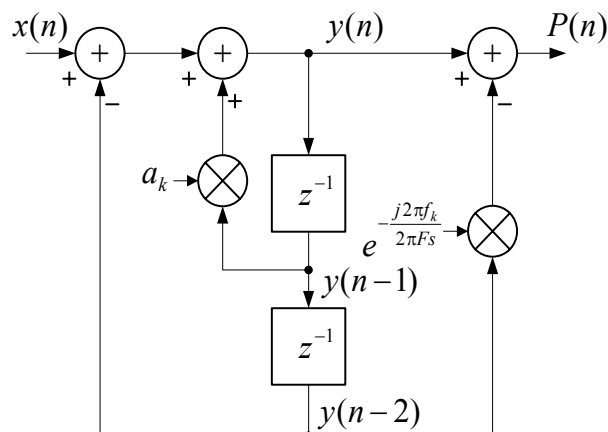


Рис. 1 Алгоритм Герцеля

Импульсная характеристика системы имеет следующий вид [5]:  $h(n) = \frac{\sin((n+1)\omega_k)}{\sin(\omega_k)} u(n)$ , где  $\omega_k$

- нормированная круговая частота,  $u(n)$  – функция Хевисайда.

Выходной сигнал системы на Рис. 1 при воздействии на нее гармонического колебания вида:

$$x(n) = \cos(\omega_s n) u(n), \quad (2)$$

где  $\omega_s$  – частота входного сигнала, равен свертке входного воздействия с импульсной характеристикой системы:  $y(n) = h(n) \otimes x(n)$ .

Введем следующие обозначения:  $P_k^n(n)$  – сигнал на выходе алгоритма Герцеля при воздействии на него сигнала вида (2) с  $\omega_s = \omega_k$ ,  $P_k^s(n)$  – сигнал на выходе алгоритма Герцеля при воздействии на него сигнала вида (2) с  $\omega_s \neq \omega_k$ . В ходе моделирования замечен следующий факт, который может быть использован при синтезе анализаторов спектра на основе алгоритма Герцеля: сигнал  $P_k^n(n)$  является монотонно возрастающей функцией номера отсчета и в первом приближении может быть представлен формулой:  $P_k^n(n) \sim \psi_k n^2$ , где  $\psi_k$  – коэффициент пропорциональности. Сигнал  $P_k^s(n)$  является периодической функцией номера отсчета и в первом приближении изменяется по закону  $P_k^s(n) \sim \gamma_k \sin^2\left(\frac{\Delta\omega}{2}n + \varphi_k\right)$ ,

где  $\gamma_k$  – коэффициент пропорциональности,  $\varphi_k$  – фазовый сдвиг, а  $\Delta\omega = \omega_s - \omega_k$  – разнос частот соседних частотных каналов. Обозначим коэффициент подавления сигнала соседнего канала относительно сигнала полезного канала:  $CR(n) = 10 \log\left(\frac{P_k^n(n)}{P_k^s(n)}\right)$ .

$$CR(n) = 10 \log\left(\frac{P_k^n(n)}{P_k^s(n)}\right).$$

Из свойств функций  $P_k^n(n)$  и  $P_k^s(n)$  следует, что функция  $CR(n)$  является квазипериодической и имеет максимумы в точках:

$$\hat{N}_{opt} \approx \text{round}\left(\frac{l}{\Delta\omega}\right), \quad l = 1, 2, \dots \quad (3)$$

Вид функции  $CR(n)$  показан на Рис. 2. При получении графика функции использовались следующие значения параметров:  $\omega_k = 0.0125$ ,  $\omega_s = 0.0136875$ ,  $\Delta\omega = 0.0011875$ . При этом значение  $\hat{N}_{opt}$ , оцененное по формуле (3) составило  $\hat{N}_{opt} = 840$ . Реальное значение  $N_{opt}$ , определенное по максимуму функции  $CR(n)$  составляет  $N_{opt} = 842$ . Итак, формула (3), пригодна для грубых прикидочных расчетов, а точное значение  $N_{opt}$  может быть найдено путем анализа максимумов функции  $CR(n)$ . Наличие ошибки в формуле (3) объясняется тем, что она не включает в себя информацию о влиянии сдвига фаз  $\varphi_k$  в выражении для

$P_k^s(n)$  на положение максимумов  $CR(n)$ . Таким образом, при использовании формулы (3) и графика функции  $CR(n)$  может быть получено значение количества отсчетов  $N_{opt}$ . При считывании оценки СПМ на выходе  $k$ -ого канала анализатора спектра на основе алгоритма Герцеля в момент времени  $n = N_{opt}$  обеспечивается максимальное отношение полезный сигнал/помеха из соседнего канала. Выигрыш в подавлении частоты соседнего канала, получаемый при подобном выборе времени накопления в узкополосной гребенке фильтров может составлять в зависимости от параметров квантования значений коэффициентов  $a_k$  и частот  $f_k$  от 20 до 50 дБ по сравнению со случаем игнорирования данной особенности алгоритма. Заметим, что для оптимальной работы анализатора спектра на основе алгоритма Герцеля сетка частот системы с многочастотным кодированием должна быть эквидистантной. Тогда оптимальное время анализа сигнала в канале  $k_j$  при условии присутствия сигнала в канале  $k_i$ ,  $i \neq j$ , определяется формулой:

$$\hat{N}_{opt} \approx \text{round}\left(\frac{l}{\Delta\omega|k_i - k_j|}\right), \quad l = 1, 2, \dots, \text{ и выбор } N_{opt} \text{ по формуле (3) для двух соседних каналов автоматиче-}$$

ски удовлетворяет критерию оптимальности для всех остальных каналов.

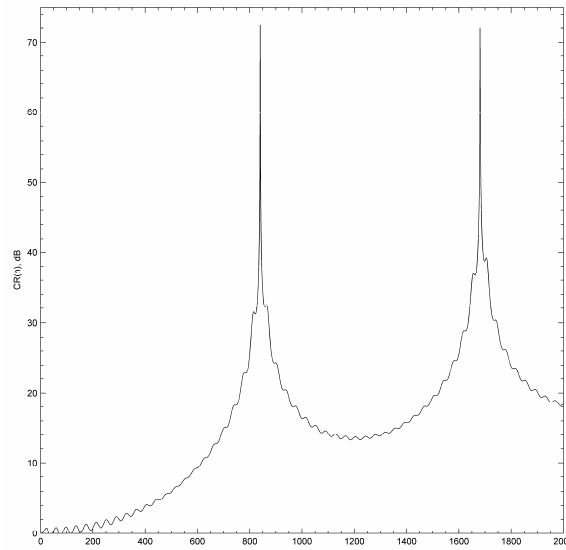


Рис. 2 Вид функции  $CR(n)$

### III. ВЫВОДЫ И АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ

В данной статье приведены результаты моделирования, при котором был отмечен ряд особенностей имеющих место при синтезе анализаторов спектра на основе алгоритма Герцеля. В частности, показано, что при синтезе таких анализаторов для систем с многочастотным кодированием использование понятия частотного разрешения для оценки качества подавления соседних каналов не всегда приемлемо. В соответствии с этим, предложена практическая методика выбора разности частот и расчета необходимой длины выборки анализатора спектра. Применение данной методики на практике позволяет получать максимальное подавление соседнего канала для рассмотренного алгоритма.

#### Литература

1. A. V. Oppenheim, R. W. Schaffer, Digital Signal Processing. Englewood Cliffs, pp 203-206. NJ: Prentice-Hall, 1975.
2. Efficient Computation of the DFT with Only a Subset of Input or Output Points, IEEE Transactions on Signal Processing, Vol. 41, No. 3, March 1993.
3. R. Beck, A. G. Dempster, I. Kale, Finite-Precision Goertzel Filters Used for Signal Tone Detection, IEEE Transactions on Circuits and Systems—II: Analog and Digital Signal Processing, Vol. 48, No. 6, June 2001.
4. Chih-Peng Fan, Guo-An Su, Novel Recursive Discrete Fourier Transform with Compact Architecture, The 2004 IEEE Asia-Pacific Conference on Circuits and Systems, 2004.
5. A. V. Oppenheim, Signals and Systems, pp 345-364. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1987.

---

## SELECTION OF OPTIMAL FREQUENCY SPACING AND ANALYSIS INTERVAL LENGTH IN SPECTRUM ANALYSERS BASED ON GOERTZEL ALGORITHM

Oreshkin<sup>1</sup>B., Kirpichnikov<sup>2</sup>A.

<sup>1</sup>Moscow Aviation Institute (State University of Aerospace Technology)

<sup>2</sup>Institute of Control Sciences Russian Academy of Science

e-mail: info@autex.ru

**Abstract** – in this paper we propose and experimentally justify a method for the selection of optimal analysis interval length and frequency spacing in spectrum analyzers for multi-tone coding systems based on Goertzel algorithm. The application of proposed method to the synthesis of optimal multi-tone coding systems results in maximum adjacent channel cancellation.

### I. INTRODUCTION

The application of Goertzel algorithm to Discrete Fourier Transform (DFT) computation is well covered in literature [1-4]. This is due to the fact that the use of Goertzel algorithm instead of Fast Fourier Transform (FFT) in spectrum analyzers of multi-tone coding systems drastically reduces computation costs associated with spectrum analyzer implementation. This statement is true if the analyzed signal consists of sinusoidal components with *a priori* known frequencies and the number of the components does not exceed  $\log_2 N$ , where  $N$  is the number of

samples in FFT. In spite of wide practical application of Goertzel algorithm to signal processing in multi-tone coding systems, to the best of our knowledge, the problem of selection of optimal analysis time and frequency spacing is not covered in literature. This relates to the fact that Goertzel algorithm was proposed as an alternative method of DFT computation and hence frequency resolution  $\Delta\omega$  naturally became its main characteristic. Frequency resolution and the number of samples in DFT are related via the following formula:  $\Delta\omega = 1/n$ . It is intuitively clear that as frequency resolution increases ( $\Delta\omega$  decreases), adjacent channel cancellation increases. Such an approach to the FFT based spectrum analyzers performance evaluation is correct when input sequence of an analyzer is preprocessed with a time window. Windowing of input sequence alleviates Gibbs effect (the effect of dripping of components from adjacent spectrum resolution cells through the side lobes of an FFT filter). Goertzel algorithm however has recursive structure and circulation of windowed samples in this algorithm leads to the deformation of initial window and incorrect processing results. From this standpoint we propose the solution to the problem of selection of optimal analysis time and frequency spacing from the maximum adjacent channel cancellation point of view.

## II. SELECTION OF OPTIMAL FREQUENCY SPACING AND ANALYSIS INTERVAL LENGTH

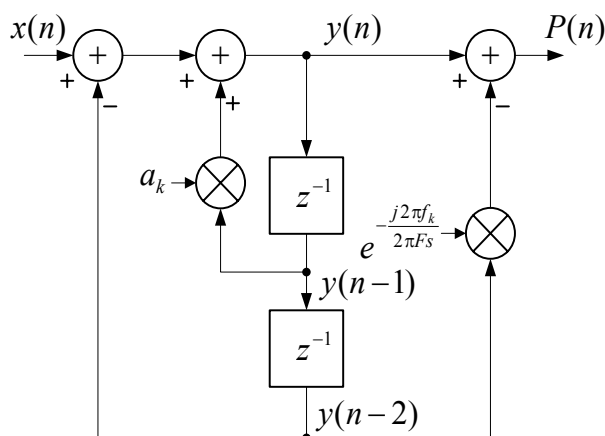


Fig. 1 Goertzel Algorithm

Goertzel algorithm is shown in Fig. 1 [1, 4]. Its functioning is described by the following equations:

$$\begin{aligned} a_k &= 2 \cos(2\pi f_k / Fs), \quad y(n) = x(n) + a_k y(n-1) - y(n-2), \\ y(n-2) &= y(n-1), \quad y(n-1) = y(n), \\ P_k(n) &= y_k^2(n-1) + y_k^2(n-2) - a_k y_k(n-1) y_k(n-2), \end{aligned} \quad (1)$$

where  $k = 1..M$  – frequency channel number,  $n = 1..N$  – sample number,  $P_k(n)$  – Power Spectrum Density (PSD) estimate at the frequency  $f_k$  of k-th channel.

Impulse response of the system is defined as follows [5]:  $h(n) = \frac{\sin((n+1)\omega_k)}{\sin(\omega_k)} u(n)$ , where  $\omega_k$  – normalized angular frequency,  $u(n)$  – unit step function. Output signal of the system in Fig. 1 with its input of the form:

$$x(n) = \cos(\omega_s n) u(n), \quad (2)$$

where  $\omega_s$  – frequency of the input sinusoidal signal, is equal to the convolution of input signal and impulse response of the system:

$$y(n) = h(n) \otimes x(n).$$

Let us denote:  $P_k^n(n)$  – signal at the output of Goertzel algorithm given the frequency of the input signal is  $\omega_s = \omega_k$ ;  $P_k^s(n)$  – signal at the output of Goertzel algorithm given the frequency of the input signal is  $\omega_s \neq \omega_k$ .

During the computer simulation the following fact, which can be used in the process of development of spectral analyzers based on Goertzel algorithm was observed: signal  $P_k^n(n)$  is the monotone increasing function of sample number and to a first approximation changes according to the law:  $P_k^n(n) \sim \psi_k n^2$ , where  $\psi_k$  – proportionality coefficient. Signal  $P_k^s(n)$  is the periodic function of sample number and to a first approximation changes

according to the law:  $P_k^s(n) \sim \gamma_k \sin^2\left(\frac{\Delta\omega}{2}n + \varphi_k\right)$ , where  $\gamma_k$  – proportionality coefficient,  $\varphi_k$  – phase shift, and  $\Delta\omega = \omega_s - \omega_k$  – frequency spacing of the adjacent frequency channels. Let us denote cancellation ratio of the adjacent channel signal with respect to the useful channel signal in spectrum analyzer based on Goertzel algorithm as:  $CR(n) = 10 \log\left(\frac{P_k^n(n)}{P_k^s(n)}\right)$ .

It follows from the properties of functions  $P_k^n(n)$  and  $P_k^s(n)$  that function  $CR(n)$  is quasi-periodic and has maximums at points:  $\hat{N}_{opt} \approx \text{round}\left(\frac{l}{\Delta\omega}\right)$ ,  $l = 1, 2, \dots$  (3)

Graphic representation of  $CR(n)$  is shown in Fig. 2. This graphic representation was obtained using the following parameter values:  $\omega_k = 0.0125$ ,  $\omega_s = 0.0136875$ ,  $\Delta\omega = 0.0011875$ . The value of  $N_{opt}$ , estimated via (3) was  $\hat{N}_{opt} = 840$ . The true value of  $N_{opt}$ , found via analysis of maximum of  $CR(n)$  in the vicinity of  $\hat{N}_{opt}$  is  $N_{opt} = 842$ . Thus, formula (3) proves useful for rough engineering calculation and exact value of  $N_{opt}$  can be found via the analysis of maximums of  $CR(n)$ . Presence of error in (3) is justified by the fact that (3) does not include information about the influence of phase shift  $\varphi_k$  in the expression for  $P_k^s(n)$  on the location of maximums of  $CR(n)$ . Consequently, exact number of time samples  $N_{opt}$  can be found using formula (3) and analyzing maximums of  $CR(n)$ . Reading PSD estimate at the output of  $k$ -th channel at the moment  $n = N_{opt}$  ensures maximum ratio useful channel signal/interference from adjacent channel.

In this connection, cancellation of adjacent channel in narrow-band spectrum analyzer using the length of analysis interval equal to  $N_{opt}$  is highest possible. Note that for optimal operation of spectrum analyzer based on Goertzel algorithm frequency grid of multi-tone coding system should be equidistant. In such conditions, optimal analysis time in channel  $k_j$  given the fact that interfering signal is present in channel  $k_i$ ,  $i \neq j$ , is defined by the

formula:  $\hat{N}_{opt} \approx \text{round}\left(\frac{l}{\Delta\omega|k_i - k_j|}\right)$ ,  $l = 1, 2, \dots$

and selection of  $\hat{N}_{opt}$  in accordance with (3) for two adjacent channels automatically satisfies optimality criterion for all remaining channels.

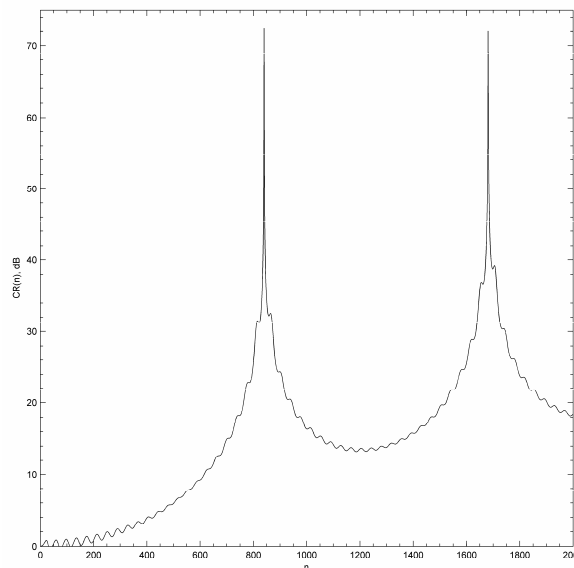


Fig. 2 Graphic representation of  $CR(n)$

### III. CONCLUSION AND DISCUSSION OF RESULTS

In this paper presented are the results of computer simulation, during which certain singularities associated with synthesis of spectrum analyzers based on Goertzel algorithm were found. Particularly, we showed that the application of spectral resolution concept while designing such spectrum analyzers for multi-tone coding systems is not always acceptable. In accordance with this fact practical method for selection of optimal frequency spacing and calculation of optimal number of time samples at the input of spectrum analyzer was proposed. The application of the proposed method allows the development of spectrum analyzers for multi-tone coding systems with maximum cancellation of adjacent channels and makes it possible to implement high-quality spectrum analyzers on processors with limited computational resources.

### REFERENCES

1. A. V. Oppenheim, R. W. Schaffer, Digital Signal Processing. Englewood Cliffs, pp 203-206. NJ: Prentice-Hall, 1975.
2. Efficient Computation of the DFT with Only a Subset of Input or Output Points, IEEE Transactions on Signal Processing, Vol. 41, No. 3, March 1993.
3. R. Beck, A. G. Dempster, I. Kale, Finite-Precision Goertzel Filters Used for Signal Tone Detection, IEEE Transactions on Circuits and Systems—II: Analog and Digital Signal Processing, Vol. 48, No. 6, June 2001.
4. Chih-Peng Fan, Guo-An Su, Novel Recursive Discrete Fourier Transform with Compact Architecture, The 2004 IEEE Asia-Pacific Conference on Circuits and Systems, 2004.
5. A. V. Oppenheim, Signals and Systems, pp 345-364. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1987.

