

ЭФФЕКТЫ КВАНТОВАНИЯ И ПЕРЕПОЛНЕНИЯ В ЦИФРОВЫХ РЕКУРСИВНЫХ ФИЛЬТРАХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА, ИСПОЛЬЗУЮЩИХ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЙ КОД С УСЕЧЕНИЕМ И СУММАТОР С ПИЛООБРАЗНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ, ПРИ ПОСТОЯННОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

Брюханов Ю.А.

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова
150000, Россия, Ярославль, ул. Советская, д.14, т/ф: (4852) 305-319. bruhanov@uniyar.ac.ru

Исследованы процессы в фильтрах нижних и верхних частот, использующих арифметику с фиксированной запятой, в предположении, что точно задан коэффициент фильтра и выполнена операция умножения, операция сложения реализуется в дополнительном коде с усечением, а сумматор имеет пилообразную характеристику. Для исследования процессов использован метод точечных отображений. Рассмотрены колебания при постоянном воздействии при отсутствии и наличии переполнения сумматора. Получены выражения для расчета наиболее вероятных режимов при произвольном числе уровней квантования.

Цифровые рекурсивные фильтры используются для селекции нижних или верхних частот [1]. Специфическими для цифровых фильтров являются эффекты конечной разрядности в представлении чисел, называемые эффектами квантования. В работе [2] исследованы процессы в рекурсивных фильтрах первого порядка с представлением чисел в дополнительном коде, с усечением после сложения, когда сумматор имеет характеристику с насыщением.

Цель данной работы – исследование процессов в цифровых рекурсивных фильтрах первого порядка с пилообразной характеристикой сумматора. Полагаем, что используется арифметика с фиксированной запятой, точно задан коэффициент фильтра a и выполняется операция умножения, а квантуются путем усечения результаты сложения чисел, представленных в дополнительном коде. Число уровней квантования $L=2^{M+1}$, где M – число используемых двоичных разрядов, произвольно. Исследуем колебания при постоянном внешнем воздействии A .

При использовании целочисленной арифметики шаг квантования равен единице, а характеристика сумматора (квантователя) чисел, представленных в дополнительном коде с усечением, определяется функцией

$$f(\varphi) = \begin{cases} [(\varphi + N)(\text{mod } L) - N] & \text{if } \varphi \geq 0, \\ [(\varphi + N)(\text{mod } L)] - N & \text{if } \varphi \leq 0, \end{cases}$$

где $[\cdot]$ – целая часть числа, $N=L/2$. Фрагмент характеристики квантователя при $L=10$ показан на рис. 1. Участки характеристики, соответствующие значениям $[\varphi]$, обозначим $0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

Движения в рассматриваемых фильтрах описываются нелинейным разностным уравнением

$$x(n+1) = f(ax(n) + A),$$

где $x(n+1)$ – реакция фильтра. Исследование проводим методом точечных отображений [3]. Для этого введем функцию $y(n) = x(n+1)$. Процессы рассматриваем на плоскости состояний (x, y) . При этом функция последования имеет вид $y(n) = f(ax(n) + A)$. Плоскость состояний разобьем на области и участки, соответственно разбиению характеристики сумматора (квантователя). На плоскости (x, y) граница участков $([\varphi] + N)(\text{mod } L) - N$, $([\varphi] + 1 + N)(\text{mod } L) - N$ определяется зависимостью $x(n) = (([\varphi] + 1 + N)(\text{mod } L) - N - A)/a$. Сама граница принадлежит участку $([\varphi] + 1 + N)(\text{mod } L) - N$.

В зависимости от начального состояния $x(0)$ в фильтре возможны различные колебания. Вероятность P колебания B определим $P(B) = m/L$, где m – число начальных условий, соответствующих колебанию B . Коэффициент фильтра a выбирается в области устойчивости линейного фильтра, т.е. $0 < |a| < 1$.

При постоянном внешнем воздействии A в зависимости от величин a и A в системе возможны режимы без переполнения и с переполнением сумматора.

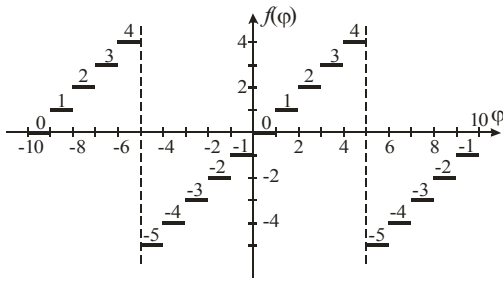


Рис. 1

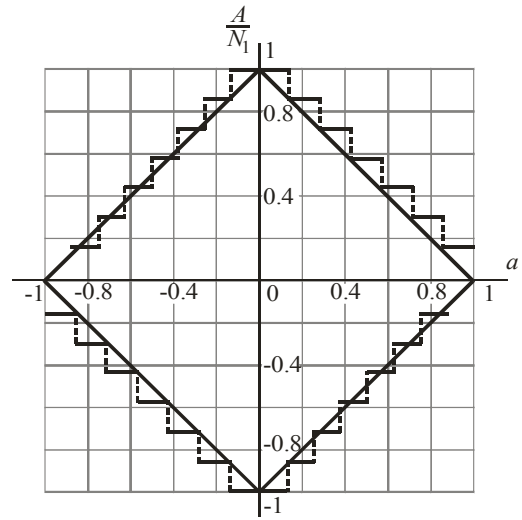


Рис. 2

Режим без переполнения. Анализ диаграмм Ламерея для различных сочетаний коэффициента фильтра a , величины внешнего воздействия A и чисел уровней квантования L позволил установить следующие закономерности. Границе режима без переполнения в случае $a > 0$ (цепь является ФНЧ), $A > 0$ соответствует принадлежность точки N_1 на оси абсцисс области N_1 , где $N_1 = N - 1$, на плоскости состояний. Откуда следует

$$(N_1 - A)/N_1 \leq a < (N - A)/N_1. \quad (1)$$

При $a > 0$, $A < 0$ граница обусловлена принадлежностью точки $-N$ области $-N$. Следовательно, должны выполняться условия

$$(N_1 + A)/N < a \leq (N + A)/N. \quad (2)$$

Пусть $a < 0$ (цепь является ФВЧ), $A > 0$. На границе режима без переполнения точка $-N$ расположена в области N_1 , Откуда следует

$$(A - N)/N < a \leq (A - N_1)/N. \quad (3)$$

Наконец, при $a < 0$, $A < 0$ граница характеризуется принадлежностью точки N_1 области $-N$. Это означает

$$-(N + A)/N_1 \leq a < -(N_1 + A)/N_1. \quad (4)$$

При помощи соотношений (1)-(4) вычислены функции $A(a)$ для ряда значений числа разрядов в представлении чисел M . На рис. 2 приведены графики границ областей без переполнения, вычисленные при $M \in \{3; 7\}$. Сама граница принадлежит области без переполнения. Исследуем процессы без переполнения.

Пусть $A > 0$, $a > 0$. Рассмотрим случай $A = 2$. При $L = 12$, $a = 7/11$ на диаграмме Ламерея график функции последования пересекается с биссектрисой при $x \in \{3, 4, 5\}$. Следовательно, при старте из точек $[x] \in [-6; 3]$ в цепи устанавливается колебание с периодом 1 и мгновенными значениями $X = 3$, обозначаемое как $T = 1(3)$. При старте из точек $x \in \{4, 5\}$ имеем соответственно движения $T = 1(4)$, $T = 1(5)$. Поэтому вероятности колебаний равны $P(3) = 10/12$, $P(4) = P(5) = 1/12$.

Анализ колебаний для ряда значений L и A позволил определить следующие закономерности для наиболее вероятных установившихся значений величины $x = X$. Если внешнее воздействие удовлетворяет условию $1 < A < A_{гр}$, где $A_{гр}$ – граничное значение A режима без переполнения для заданного a , то в ФНЧ устанавливается наиболее вероятное движение $T = 1(X)$, где $A \leq X < N_1$, если на диаграмме Ламерея точки X и $X - 1$ принадлежат области X . Это означает выполнение условия

$$(X - A)/(X - 1) \leq a < (X + 1 - A)/X.$$

Пусть $A < 0$, $a > 0$. Воспользовавшись методикой, описанной выше, получаем следующие закономерности для наиболее вероятных установившихся колебаний при произвольных L и a . При $-N_1 \leq A < 0$ на выходе фильтра имеем колебание $T = 1(X)$, где $-N \leq X < A$, если на диаграмме Ламерея точки X и $X + 1$ принадлежат области X . Это означает выполнение условия

$$(X + 1 - A)/(X + 1) < a \leq (X - A)/X.$$

Пусть $A > 0$, $a < 0$. Рассмотрим случай $A = 2$. При $L = 12$, $a = -7/11$ график функции последования на диаграмме Ламерея пересекается с биссектрисой в единственной точке при $x = 1$. Это означает, что при старте из точки $x = 1$ в фильтре существует колебание $T = 1(1)$. Поскольку точка 0 на оси абсцисс принадлежит области 2, а точка 2 – области 0, то при других стартовых состояниях в фильтре устанавливаются колебания $T = 2(2/0)$.

Анализ колебаний для ряда значений $A > 1$ и L позволил установить следующие закономерности для наиболее вероятных установившихся значений X . В общем случае произвольных L и $1 < A \leq N_1$ на выходе ФВЧ

имеем $T=1(X)$, где $1 \leq X < A$, если на диаграмме Ламерея точки X и $X-1$ или точки X и $X+1$ принадлежат области X . Это означает выполнение условия

$$(X - A) / X \leq a < (X + 1 - A) / (X - 1) \tag{5}$$

или

$$(X - A) / (X + 1) \leq a < (X + 1 - A) / X. \tag{6}$$

Другим областям коэффициента $a < 0$ по сравнению с определяемым из (5), (6) в режиме без переполнения соответствуют наиболее вероятные паразитные колебания с периодом $T=2$.

При $A < 0$, $a < 0$ результирующие соотношения получаем из (5), (6) путем замены знаков \geq и $<$ на \leq и $>$ соответственно.

Полученные закономерности позволяют найти зависимость $X(a)$ при любых L и A для режима без переполнения.

Режим с переполнением. Переполнение разрядной сетки, возникающее при определенных значениях коэффициента a и постоянного внешнего воздействия A может привести к существенному усложнению вида функции последования и значительно изменить форму выходных колебаний. Исследования диаграмм Ламерея показали, что в ФНЧ в установившемся режиме возникают периодические колебания с широким спектром значений $T > 1$. В качестве примера на рис. 3 показана лестница Ламерея, поясняющая возникновение колебаний с периодом $T=5$ в ФНЧ с коэффициентом $a=9/11$ при внешнем воздействии $A=3$.

В общем случае при $A > 0$, $a > 0$ перемещение изображающей точки на интервале $n \in [0, T-2]$ описывается выражением

$$x(n+1) = f_1(ax(n) + A), \tag{7}$$

где

$$f_1(\varphi) = \begin{cases} [\varphi] & \text{и } \delta \epsilon \quad 0 \leq \varphi < N, \\ [\varphi + N] - N & \text{и } \delta \epsilon \quad -N \leq \varphi < 0. \end{cases}$$

Величины T , a и A связаны соотношением

$$f_1(ax(T-1) + A - L) = x(0), \tag{8}$$

где, как показывают исследования, $x(0) = f_1(aN_1 + A - L)$ или $x(0) = -N$. С помощью (8) можно рассчитать области $A(a)$, при которых существуют колебания с определенными T . В качестве примера на рис. 4 приведены расчетные области для $T \in [2; 5]$, $M=4$.

При $A < 0$, $a > 0$ процесс перемещения изображающей точки на плоскости состояний на вышеуказанном интервале n по-прежнему описывается выражением (7). Однако в (8) имеем $x(0) = f_1(-aN + A + L)$ или $x(0) = N_1$.

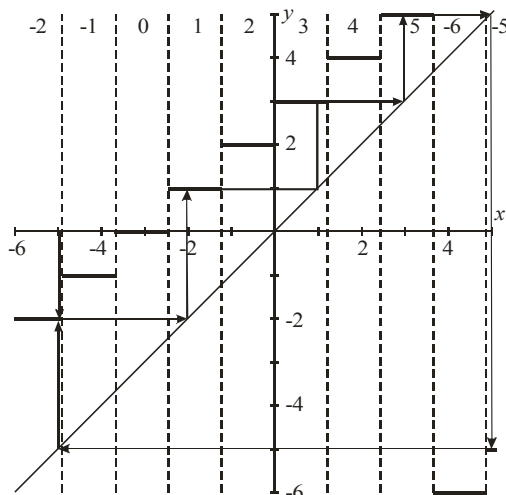


Рис. 3

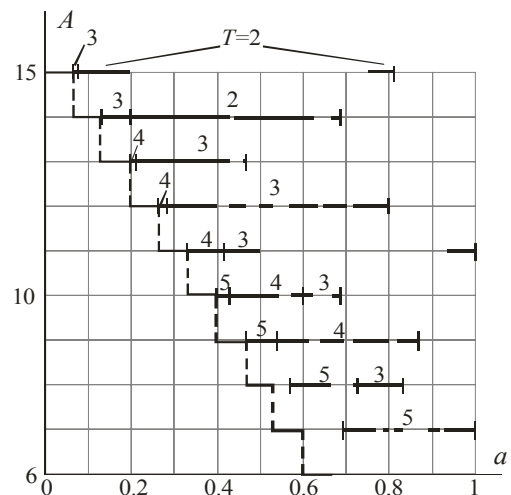


Рис. 4

Исследования движений в ФВЧ при произвольном знаке A показали, что при переполнении наиболее вероятные движения с периодом $T=1$ подчиняются тем же закономерностям, которые установлены выше для режима без переполнения. При других значениях коэффициент $a < 0$ в системе устанавливаются колебания с периодом $T=2$, но с более широким по сравнению с режимом без переполнения спектром мгновенных значений x .

Теоретические результаты подтверждены компьютерным моделированием.

Полученные закономерности нетрудно распространить на случай, когда переменные представлены в форме чисел с выравниванием слева (т.е. в виде дробных чисел). Для этого достаточно ввести новую переменную $\bar{x} = xq$, где $q=1/N$ — шаг квантования.

Литература

1. Рабинер Л., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов. М.: Мир, 1978.

2. Брюханов Ю.А. Эффекты квантования в цифровых рекурсивных фильтрах первого порядка с представлением чисел в дополнительном коде с усечением после сложения // 7-я междунар. конф. «Цифровая обработка сигналов и ее применение». Докл. Т.1. Москва, 2005. С. 81.
3. Бутенин Н.В., Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А. Введение в теорию нелинейных колебаний. М.:Наука, 1987.

◆

QUANTIZATION AND OVERFLOWING EFFECTS IN DIGITAL RECURSIVE FIRST-ORDER FILTERS WITH ROUND-OFF UNDER CONSTANT EXTERNAL INFLUENCE

Bryuhanov Yu.

Yaroslavl State University
150000, Russia, Yaroslavl, Sovetskaya st., 14
Phone/Fax: (4852) 305-319. E-mail: bruhanov@uniyar.ac.ru

The processes in the low-pass and high-pass filters which use an integer-valued fixed-point arithmetic have been observed. It was assumed that the filter coefficient exactly obtained and the multiplying operation performed exactly and the adding operation realized in the complement code with round-off.

The characteristic of adder (quantizer) is determined by the following function

$$f(\varphi) = \begin{cases} [(\varphi + N)(\text{mod } L) - N] & \text{if } \varphi \geq 0, \\ [(\varphi + N)(\text{mod } L)] - N & \text{if } \varphi \leq 0, \end{cases}$$

where $[\cdot]$ – integer part of the value, $N=L/2$, $L=2^{M+1}$, M – the number of bits. Oscillations in the considered filters are subscribed by the non-linear differential equation $x(n+1)=f(ax(n)+A)$, where A – constant external influence. The researching is performing using the pointwise mapping method. In dependence of the values of a and A there are modes with or without overflowing can be realized in the system.

Mode without overflowing. Analysis of the Lamerey's diagrams for different combinations of a , A and L let us to state following regularities. The boundary of mode without overflowing is determined by the following expressions:

in case of $a>0, A>0$ (1)
 $(N_1-A)/N_1 \leq a < (N-A)/N_1,$

in case of $a>0, A<0$ (2)
 $(N_1+A)/N < a \leq (N+A)/N,$

in case of $a<0, A>0$ (3)
 $(A-N)/N < a \leq (A-N_1)/N,$

in case of $a<0, A<0$ (4)
 $-(N+A)/N_1 \leq a < -(N_1+A)/N_1,$

where $N_1=N-1$. Processes without overflowing have been investigated in [1].

Mode with overflowing. There are parasitic oscillations with wide spectrum of the period's values $T>1$ arise in the low pass filters. At the interval $n \in [0, T-2]$ its is described by the equation

$$x(n+1)=f_1(ax(n)+A), \tag{5}$$

where

$$f_1(\varphi) = \begin{cases} [\varphi] & \text{if } 0 \leq \varphi < N, \\ [\varphi + N] - N & \text{if } -N \leq \varphi < 0, \end{cases}$$

and

$$f_1(ax(T-1)+A-L)=x(0), \tag{6}$$

where $x(0)=f_1(aN_1+A-L)$ or $x(0)=-N$. If $A<0$, then $x(0)=f_1(-aN+A+L)$ or $x(0)=N_1$.

Researching of movements in low pass filters with arbitrary sign of A in case of overflowing shown, that the most probable movements with period $T=1$ are subjected by the lows, as for mode without overflowing. At other values of the coefficient $a<0$ oscillations with period $T=2$ are established in the system. In this case spectrum of the instant values x is wider then one in the case of mode without overflowing.

References

1. Bryuhanov Yu. Quantization effects in the first order digital recursive filters with representation of numbers in an additional code with truncation after addition // Proc. of 7th Int. Conf. "Digital Signal Processing and its Applications" (DSPA'2005). Moscow, 2005. V. 1. P. 84.

