ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ АСПЕКТЫ МАТРИЧНОГО МЕТОДА ОЦЕНКИ СИСТЕМ ОБСЛУЖИВАНИЯ

Денисова Т.Б.

Поволжская государственная академия телекоммуникаций и информатики

Если в СМО входящий поток и (или) процесс обслуживания имеют флуктуирующие между несколькими уровнями интенсивности, то для оценки характеристик СМО целесообразно использовать матричные методы. Матричные методы имеют преимущества с точки зрения записи уравнений и техники их анализа, вероятностное толкование получаемых результатов становится прозрачным. Матричная запись может применяться непосредственно к системе уравнений равновесия (СУР) и к СУР в производящих функциях. Решение систем уравнений получается в виде матрично-рекуррентных формул и алгоритмов, которые можно запрограммировать для расчета характеристик СМО. Основную сложность в решении представляет нахождение векторов, соответствующих некоторым граничным состояниям счетной компоненты. Кроме того, необходимо уделять внимание проблеме точности расчета.

Применим матричный метод для расчета характеристик системы BMAP/G/1/∞ с групповым Марковским потоком, произвольным временем обслуживания, одним обслуживающим прибором и бесконечной памятью.

На вход системы поступает BMAP – поток [1,2], который полностью характеризуется размерностью $W+1$ управляющего процесса ν_t и матрицами D_k, $k \ge 1$, интенсивностей переходов процесса ν_t, сопровождающихся генерацией k запросов.

Система BMAP/G/1/∞ описывается двумерным процессом $\{i_t, \nu_t\}$, где i_t - число запросов в системе в момент t, ν_t - состояние управляющего процесса в момент t. Система BMAP/G/1/∞ не является Марковской, так как поведение системы после момента t зависит от того, как долго к моменту t длится текущее обслуживание, т.е. от предистории процесса. Для марковизации процесса применим метод вложенных цепей Маркова и будем исследовать процесс $\{i_{t_k}, \nu_{t_k}\}$, где t_k - момент окончания обслуживания k-запроса, i_{t_k} - число запросов в системе в момент t_k, является счетной компонентой, ν_{t_k} - состояние управляющего процесса в момент t_k, является конечной компонентой.

Введем вектор стационарных вероятностей состояний системы $\overline{\pi}(i) = (\pi(i,0),...,\pi(i,W))$, $i \ge 0$, где $\pi(i,\nu) = \lim\limits_{k\to\infty} P\{i_{t_k} = i, \nu_{t_k} = \nu\}$, $i \ge 0$, $\nu = \overline{0,W}$.

Переходные вероятности системы имеют вид:

$$P\{i_{n+1} = l, \nu_{n+1} = \nu' / i_n = i, \nu_n = \nu\} = \begin{cases} Y_{l-i+1}(\nu,\nu'), \quad i>0,\ l \ge i-1,\ \nu,\nu' = \overline{0,W} \\ V_l(\nu,\nu') \quad i=0,\ l\ge 0,\ \nu,\nu' = \overline{0,W} \end{cases},$$

где $Y_{l-i+1}(\nu,\nu')$ - переходные вероятности из ненулевого состояния i в состояние l, при этом управляющий процесс меняет состояние с ν на ν', $V_l(\nu,\nu')$ - переходные вероятности из нулевого состояния в состояние l, при этом управляющий процесс меняет состояние с ν на ν'.

Вероятности $Y_{l-i+1}(\nu,\nu')$ имеют смысл вероятности поступления $l-i+1$ запросов в систему за время обслуживания запроса, т.е. за интервал времени (t_k, t_{k+1}). Так как вероятности $Y_{l-i+1}(\nu,\nu')$ зависят от разности $l-i$, то матрица переходных вероятностей является квазитеплицевой. Свойство квазитеплицевости позволяет провести исследование двумерных цепей $\{i_{t_k}, \nu_{t_k}\}$ и получить прозрачные матричные аналоги результатов для соответствующих одномерных систем.

Матричное уравнение равновесия для стационарных вероятностей состояний системы BMAP/G/1/∞ имеет вид:

$$\overline{\pi}(l) = \overline{\pi}(0)\cdot V_l + \sum_{i=1}^{l+1} \overline{\pi}(i)\cdot Y_{l-i+1}, \quad l \ge 0, \quad l = \overline{0, L-1}.$$

Зная $\overline{\pi}(0)$, мы можем вычислить значение $\overline{\pi}(l)$ по рекуррентной формуле:

$$\overline{\pi}(l+1) = \left[\overline{\pi}(l) - \overline{\pi}(0)\cdot V_l - \sum_{i=1}^{l} \overline{\pi}(i)\cdot Y_{l-i+1}\right]\cdot Y_0^{-1}. \tag{1}$$

Но прежде определим матрицы одношаговых вероятностей переходов V_l, Y_{l-i+1} и вектор начальных стационарных вероятностей состояний $\overline{\pi}(0)$.

Рассмотрим приближенный алгоритм определения одношаговых переходных вероятностей BMAP потока. Одношаговые переходные вероятности определяются по формуле: $Y_n = \int_0^\infty P(n,t)dB(t)$, где $P(n,t)$ - матрица вероятностей поступления n запросов на интервале $(0,t)$, (ν,ν')-элемент матрицы задает вероятность поступления n запросов на интервале $(0,t)$, причем управляющий процесс в начале и в конце интервала находится в состояниях ν и ν' соответственно, $B(t)$ - закон распределения времени обслуживания запроса.

Используя метод составления и решения уравнений Колмогорова для цепей Маркова с непрерывным временем, несложно получить систему разностных уравнений, а затем и матричное дифференциальное уравнение для матрицы вероятностей $P(n,t)$

$$\dot{P}(n,t) = P(n,t)\cdot D_0 + u(n)\sum_{k=0}^{n-1} P(k,t)\cdot D_{n-k}\,, \tag{2}$$

где $u(x)$ - функция Хевисайда.

Для решения неоднородного линейного дифференциального матричного уравнения (2) найдем сначала решение однородного линейного дифференциального матричного уравнения

$$\dot{P}(n,t) = P(n,t)\cdot D_0\,. \tag{3}$$

Уравнение (3) имеет решение

$$P(n,t) = e^{D_0 t} = e^{\theta\cdot t\cdot(L-I)} = e^{-\theta\cdot t\cdot I}\cdot e^{\theta\cdot t\cdot L} = e^{-\theta\cdot t}\cdot\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\theta\cdot t)^m}{m!}L^m\,,$$

где $L = I + \theta^{-1}\cdot D_0$, $\theta = \max_{i=0,W}(-D_0)_{ii}$.

Решение уравнения (2) будем искать в виде $P(n,t) = e^{D_0\cdot t}\cdot R_n$, где R_n не зависит от t, так как уравнение (2) имеет постоянные коэффициенты.

$$P(n,t) = e^{D_0\cdot t}\cdot R_n = \sum_{m=0}^{\infty} e^{-\theta\cdot t}\frac{(\theta\cdot t)^m}{m!}\cdot L^m\cdot R_n = \sum_{m=0}^{\infty} e^{-\theta\cdot t}\frac{(\theta\cdot t)^m}{m!}\cdot K_n^{(m)}\,, \tag{4}$$

где $K_n^{(m)} = L^m\cdot R_n$.

Подставим полученное выражение (4) в уравнение (2)

$$\theta\cdot\sum_{m=0}^{\infty} e^{-\theta\cdot t}\frac{(\theta\cdot t)^m}{m!}K_n^{(m+1)} = \theta\cdot\sum_{m=0}^{\infty} e^{-\theta\cdot t}\frac{(\theta\cdot t)^m}{m!}K_n^{(m)} + \sum_{m=0}^{\infty} e^{-\theta\cdot t}\frac{(\theta\cdot t)^m}{m!}\sum_{k=0}^{n} K_k^{(m)} D_{n-k}\,. \tag{5}$$

Из (5) следует $K_n^{(m+1)} = K_n^{(m)} + \theta^{-1}\sum_{k=0}^{n} K_k^{(m)} D_{n-k}$.

Получены рекуррентные формулы для вычисления матриц $K_n^{(m)}$:

$$K_0^{(0)} = I,\quad K_n^{(0)} = 0,\quad n\ge 1,$$

$$K_0^{(m+1)} = K_0^{(m)}\cdot\left(I + \theta^{-1}D_0\right),$$

$$K_n^{(m+1)} = K_n^{(m)}\cdot\left(I + \theta^{-1}D_0\right) + \theta^{-1}\sum_{k=0}^{n-1} K_k^{(m)} D_{n-k}\,. \tag{6}$$

Подставим (6) в (2) и вычислим одношаговые переходные вероятности

$$Y_n = \int_0^\infty P(n,t)dB(t) = \sum_{m=0}^{\infty}\left(\int_0^\infty e^{-\theta\cdot t}\frac{(\theta\cdot t)^m}{m!}dB(t)\right)\cdot K_n^{(m)} = \sum_{m=0}^{\infty}\gamma_m K_n^{(m)}\,, \tag{7}$$

где числа

$$\gamma_m = \int_0^\infty e^{-\theta \cdot t} \frac{(\theta \cdot t)^m}{m!} dB(t) \tag{8}$$

имеют смысл вероятности поступления m запросов из стационарного потока интенсивности θ за время обслуживания одного запроса. В случае произвольного распределения эти числа можно подсчитать численно.

С использованием формулы полной вероятности получим выражение для матрицы V_m :

$$V_m = -D_0^{-1} \sum_{k=1}^{m+1} D_k Y_{m+1-k} \ .$$

Для определения вектора начальных стационарных вероятностей состояний $\overline{\pi}(0)$ используем теорию восстановления. Вложенную цепь Маркова можно описать как процесс восстановления. Моментами восстановления для вложенной цепи Маркова будут те моменты окончания обслуживания заявок, после которых система полностью освобождается от заявок. Для изучения периода занятости системы используется понятие фундаментального периода. Фундаментальный период – это интервал времени с момента, когда значение счетной компоненты равно j, до первого момента, когда значение этой компоненты станет равным $j-1$, $j \geq 1$.

Нас интересует значение вектора $\overline{\pi}(0)$, ν-компонента которого $\pi(0,\nu)$ обратно пропорциональна среднему числу переходов, которое совершит вложенная цепь, выйдя из состояния $(0,\nu)$ до первого попадания в него. Поэтому нам нужно определить распределение числа переходов цепи между двумя соседними попаданиями в состояние с нулевым значением счетной компоненты. Введем обозначения.

$G_n = \left\| g_n(\nu,\nu') \right\|$ – матрица вероятностей того, что фундаментальный период содержит n переходов цепи.

$G_n(j) = \left\| g_n(j;\nu,\nu') \right\|$ – матрица вероятностей того, что фундаментальный период, открывающийся j заявками, содержит n переходов цепи.

$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} G_n \cdot z^n$ – матричная производящая функция числа переходов за фундаментальный период.

Для вычисления распределения периода занятости заметим, что с вероятностью $Y_0(\nu,\nu')$ период занятости заканчивается на первом шаге, с вероятностью $Y_1(\nu,\nu')$ после первого шага цепь возвращается в состояние 1, с вероятностью $Y_2(\nu,\nu')$ цепь переходит в состояние 2 и т.д. Поэтому

$$g_1(\nu,\nu') = Y_0(\nu,\nu'), \ \ g_n(\nu,\nu') = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{W} Y_j(\nu,k) \cdot g_{n-1}(j;k,\nu'), \ n > 1 .$$

В матричном виде: $G_n = \sum_{j=1}^{\infty} Y_j \cdot G_{n-1}(j)$, $n > 1$. $G_1 = Y_0$.

В производящих матричных функциях:

$$G(z) = z \sum_{j=0}^{\infty} Y_j G^j(z) . \tag{9}$$

Для решения уравнения (9) применим итерационный метод последовательных приближений.

$$G_1 = Y_0 , \ \ G_k = \sum_{j=1}^{k-1} Y_j G_{k-1}^j \ . \tag{10}$$

Для матричной производящей функции $K(z)$, (ν,ν')-элемент которой есть производящая функция числа переходов за время до возвращения счетной компоненты в нулевое состояние с состоянием конечной компоненты ν' в момент возвращения при условии, что в момент выхода эта компонента находилась в состоянии ν, справедливо

$$K(z) = z \cdot \sum_{j-0}^{\infty} V_j G^j(z) ,$$

$$k \cdot K(1) = k \ , \ \ k \cdot \overline{1} = 1 , \ k^* = K'(1) \cdot \overline{1} \ ,$$

где k - вектор-строка стационарных вероятностей состояний управляющего процесса,

k^* - вектор-столбец среднего числа переходов цепи за время до возвращения счетной компоненты в нулевое состояние.

Используя интерпретацию стационарной вероятности в терминах числа переходов, получим

$$\bar{\pi}(0) = \frac{k}{k \cdot k^*}. \tag{11}$$

Вычисления по формуле (1) страдает накоплением ошибок округления, поскольку в итерации имеются операции вычитания. Перейдем от исходной цепи к сенсорным цепям при фиксированном значении l. Сенсорная цепь получится [3], если из исходной цепи выкинуть те интервалы времени, когда число заявок в системе больше l, а оставшиеся куски процесса склеить. Получившийся процесс будет идентичен по своим вероятностным свойствам исходному процессу. Итерация алгоритма будет иметь вид [1]

$$\bar{\pi}_l = \bar{\pi}_0 R_l,\ l \ge 0,\ R_0 = I,$$
$$R_l = \left(\bar{V}_l + \sum_{i=1}^{l-1} R_i \bar{Y}_{l+1-i}\right)\left(I - \bar{Y}_1\right)^{-1}, \tag{12}$$

где $\bar{V}_l = \sum_{i=l}^{\infty} V_i G^{i-l}$, $\bar{Y}_l = \sum_{i=l}^{\infty} Y_i G^{i-l}$, матрица G задает вероятности переходов за время, когда счетная компонента, стартуя из состояния i, впервые достигнет состояния $i-1$. Эта матрица является решением уравнения $G = \sum_{j=0}^{\infty} Y_j G^j$.

Таким образом, в докладе приведены алгоритм вычисления матрицы одношаговых переходных вероятностей и алгоритм вычисления стационарного распределения вложенной цепи Маркова. Алгоритмы используют итерационный процесс последовательных приближений. Алгоритмы просты и удобны для использования вычислительной техники. Однако сходимость итерационных алгоритмов может оказаться медленной из-за неточности исходных данных и необходимости округления в процессе вычисления. Представляется, что повышение точности решения и сходимости алгоритмов может быть достигнуто путем введения приемов ускорения итерационных процессов, использования вычислительных схем минимальных итераций с оценкой вектора ошибки.

Литература

1. Lucantoni D.M. New results on the single server queue with a batch Markovian arrival process // Commun. Statistics-Stochastic Models. 1991. V. 7. №1. P. 1-46.
2. Дудин А.Н., Клименок В.И. Системы массового обслуживания с коррелированными потоками. Минск. БГУ, 2000.
3. Кемени Д., Снелл Д. Конечные цепи Маркова. “Наука”, М., 1970.

THE COMPUTING ASPECTES OF THE MATRIX METHOD OF EVALUATION OF THE SYSTEMS OF SERVICE

Denisova T.
The Povolzhskaya State Academy of Telecommunication and Informatics

We examine the usage of the matrix method for the calculation of the BMAP/G/1/∞ system characteristics with the group markovian current, arbitrary time of service, one server and infinite memory. The algorithm of the solution of the matrix of one-step transitional probabilities and the algorithm of the solution of the stationary distribution of embedded Markov chain are brought to. The algorithms are simple and useful for the usage of computer techniques. But the convergence of the iterary algorithms may be slow because of the inaccuracy of the basic data and necessity of rounding in the process of calculation. It seems that the increase of the accuracy of solution and algorithm convergence may be reached by introducing the method of acceleration of nterary processes, usage of computing circuits of the minimal iteration.