КРИТЕРИЙ СЛОЖНОСТИ СИГНАЛА – ДИНАМИЧЕСКАЯ КРИВИЗНА ЕГО ТРАЕКТОРИИ В РАСШИРЕННОМ ПРОСТРАНСТВЕ СОСТОЯНИЙ

Макаренко А.В.

Северо-Кавказский горно-металлургический институт
(государственный технологический университет)
362021, Россия, Владикавказ, avm@skgtu.ru

1.Введение. Понятие "сложность" того или иного объекта относится к числу фундаментальных научных понятий, но наряду с этим, вопрос её определения и вычисления нельзя считать методологически закрытым [1].

Не является исключением и более узкое понятие "сложность сигнала", которое будучи важнейшей характеристикой связанно в частности с предсказуемостью и информационной ёмкостью сигнала. Кроме того, в зависимости от сложности сигнал классифицируют либо как детерминированный, либо как стохастичный [2].

Впервые, количественный подход к понятию "сложность" был сформулирован в статистической физике равновесных систем с введением понятия "энтропия" [3]. Дальнейшее развитие эта идея получила в работах К.Шеннона, где были введены понятие энтропии вероятностных распределений [4]. Эти понятия были развиты А.Н.Колмогоровым и Я.Г.Синаем в созданной ими энтропийной теории динамических систем [5]. Фактически это явилось обобщением энтропии Шеннона на случай динамических систем.

Развитие нелинейной динамики, теории хаотических динамических систем, теории неравновесных систем потребовало введения соответствующих характеристик, таких как показатели Ляпунова, энтропия Колмогорова, S-параметр Климонтовича [6]. Эти параметры по сути также связаны с энтропией Шеннона.

В начале 80-х годов А.Н. Колмогоров предложил принципиально новый, алгоритмический подход к интерпретации понятия "сложность" [7]. Критерий был формализован на языке теории алгоритмов и для него была построена соответствующая мера.

В работе [8] предложен оригинальный подход к исчислению сложности одномерного сигнала основанный на идее информационных затрат требующихся для аппроксимации сигнала с требуемой точностью. Подход идейно близок к алгоритмическому подходу А.Н. Колмогорова.

В радиотехнике активно применяется частотно-временной критерий сложности [9]. В этом случае мерой является произведение ширины спектра на длительность сигнала. К сожалению, критерий не учитывает форму спектра, что делает оценку сложности несколько условной.

Таким образом, наиболее широко распространены модификации энтропийной меры Шеннона и алгоритмической меры Колмогорова. В свою очередь, эти меры обладают особенностями, ограничивающими их применимость. В частности, энтропийная мера не позволяет измерять сложность конкретной траектории и оперирует лишь сложностью ансамбля реализаций, а алгоритмическая мера весьма трудоёмка для вычисления и интерпретации результатов.

В настоящей работе предложен новый подход к описанию и вычислению сложности одномерных гладких сигналов основанный на вычислении их полной искривлённости.

2.Постановка задачи. Введем в рассмотрение одномерный гладкий динамический сигнал описываемый посредством функции $x(t)$. Будем полагать, что $x \in X$ и $t \in T$, а $X \subset R^1$ и $T \subset R^1$. Причем функция $x(t)$ – гладкая, принадлежит классу C^∞, и является непрерывной на промежутке $t \in (-\infty,+\infty)$.

Для введённого сигнала необходимо предложить критерий его сложности во временной области. При этом мера сложности по предложенному критерию должна оперировать конкретной реализацией сигнала, сравнительно легко вычисляться и иметь обоснованный физический смысл.

3.Основные положения метода. Интуитивное представление о сложности сигнала позволяет сформулировать следующее утверждение: *чем более искривлена форма траектории динамического процесса, тем он более сложен.* Следовательно, вполне логично в качестве критерия сложности сигнала $x(t)$ использовать искривлённость его траектории в расширенном пространстве состояний Ω образованном прямым произведением: $\Omega = X \times T$, $\Omega \subset R^2$. Исходя из физических предпосылок в пространстве Ω посредством нормы: $dl^2 = dx^2 + dt^2$ введём евклидову метрику.

В работе [10] предложена система функций характеризующих искривлённость сигнала $x(t)$, порождаемая действием на него углового оператора TG_k^a:

$$\alpha^T(t) = TG_1^a x(t),\ \varphi_0{}^T(t) = TG_2^a x(t),\ \varphi_i{}^T(t) = TG_{i+2}^a x(t). \quad (1)$$

Оператор TG_k^a порядка k имеет следующий вид (умножение производится слева):

$$TG_k^a = tg\prod_{i=1}^{k} arctg\left[(c_s)_i \frac{d}{dt}\right], \qquad (2)$$

где $k = 1,2,...,N_G$, $N_G \to +\infty$, $c_s > 0$ – масштабный коэффициент, служит для управления чувствительностью анализатора. Принципы вывода системы функций (1) приведены в работе [11].

Оператор (2) порядка $k = 2$ определяет функцию

$$\varphi_0^{\ T}(t) = \frac{c_{ss}c_{as}\ddot{x}(t)}{1 + c_{ss}^{\ 2}\dot{x}^2(t)}, \qquad (3)$$

которая по своей сути и структуре аналогична $\ddot{x}(t)/(1+\dot{x}^2(t))^{3/2}$ – классической мере искривлённости гладкой плоской кривой [12], но в отличии от неё, $\varphi_0^{\ T}(t)$ измеряет искривлённость $x(t)$ не в функции длины траектории, а в функции времени явно. Поэтому $\varphi_0^{\ T}(t)$ логично трактовать как мгновенную динамическую кривизну сигнала $x(t)$.

Согласно сформулированному выше утверждению, сложность сигнала характеризуется суммарной искривлённостью его траектории. Следовательно, в нашем смысле, мерой сложности сигнала на промежутке $t \in (-\infty,+\infty)$ будет являться мера его полной динамической кривизны:

$$C_\varphi = \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\varphi_0^{\ T}(t)\right| dt. \qquad (4)$$

По своей геометрической сути, величина C_φ показывает полный угол поворота касательного вектора к кривой $x(t)$ (вектора её скорости), когда внешний параметр t пробегает свои значения на указанном промежутке. Таким образом, если сигнал – прямая линия, то $C_\varphi = 0$. Следовательно, полная динамическая кривизна показывает насколько форма сигнала отличается – усложняется – относительно прямой линии.

4.Сложность гармонического сигнала. Введём в рассмотрение синусоидальный сигнал с амплитудой A, угловой частотой ω и длительностью в один период:

$$x(t) = \begin{cases} A\sin\omega t, & t \in [0,T] \\ 0, & t \notin [0,T] \end{cases}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega}. \qquad (5)$$

После несложных вычислений получим для сложности сигнала (5) выражение в явном виде:

$$C_\varphi = 4c_{as}arctg(c_{ss}A\omega). \qquad (6)$$

Анализ формулы (6) позволяет относительно сигнала (5) сделать следующие выводы (положим, что нормирующие коэффициенты равны единице). Во-первых, для сигнала существует конечная предельная сложность, а следовательно, ограничена сложность всех гармонических сигналов конечной длительности. Во-вторых, сложность сигнала определяется величиной произведения $A\omega$ – его амплитудно-частотной базой.

На рис. 1 в относительных величинах приведены графики сигнала (5) и его сложности (6) как функции от времени t. Анализ этих кривых и их сопоставление между собой позволяет сделать вывод, что именно области экстремумов сигнала вносят основной вклад в его сложность.

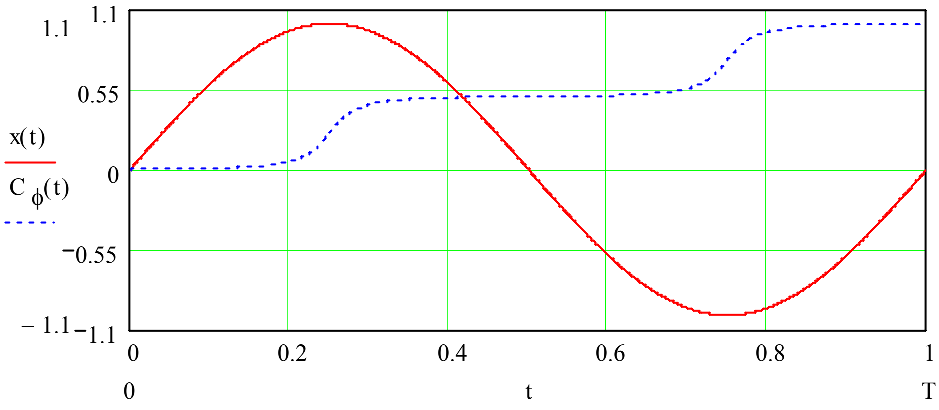

Рис. 1. Графики сигнала (5) и его сложности (6) как функции от времени t

5.Расчёт сложности реальных временных рядов. Для вычисления $\hat{C}_\varphi$ – оценки сложности сигнала заданного временным рядом x_k, $k = 0,1,...,N$, возможно применить следующие подходы:

1) Интерполировать временной ряд какой либо кривой и получить оценку $\hat{C}_\varphi$ численно-аналитическим способом. Способ практически не применим для сложных сигналов.

2) Получить оценки производных сигнала и, заменив в (4) интеграл на конечную сумму, вычислить оценку $\hat{C}_\varphi$. Численное дифференцирование требует применения процедур регуляризации. В настоящее время наиболее перспективным подходом является вейвлет-регуляризация [13], однако смещённость и дисперсия получаемых оценок и зависимость качества получаемых оценок от сочетания исходного сигнала и фильтрующего вейвлета – в должной мере не изучены, также неформализована процедура выбора материнского вейвлета.

3) Восстановить оценки производных сигнала и заменив в (4) интеграл на конечную сумму вычислить оценку $\hat{C}_\varphi$. Для восстановления возможно применение методов как линейной фильтрации (дифференцирующих фильтров Калмана-Бьюси и фильтров Колмогорова-Винера) [14], так и методов нелинейной фильтрации [15]. Методы хорошо зарекомендовали себя на практике, есть общая и полная теория фильтрации, но есть ограничения: высокие вычислительные затраты, сложность в реализации фильтров и самое главное, ядро фильтра требует модели динамики сигнала, что подразумевает весьма высокие априорные знания о процессе.

6.Выводы. В работе проанализированы широко применяющиеся на практике критерии оценки сложности динамических систем и процессов. На основании проведенного анализа выявлено, что существующие подходы к оценке сложности сигналов обладают рядом принципиальных недостатков, которые либо делают оценку сложности условной, либо ограничивают их применимость, либо весьма трудоёмки для вычисления и интерпретации результатов. Наряду с этим установлено, что понятие "сложность сигнала" является важнейшей характеристикой связанной в частности с его предсказуемостью и информационной ёмкостью. Кроме того, сложность сигнала определяет его принадлежность либо к классу детерминированных, либо к классу стохастичных процессов. Поэтому в настоящей работе предложен новый подход к описанию и вычислению сложности одномерных гладких сигналов основанный на вычислении их полной искривлённости через динамическую кривизну траектории сигнала в расширенном пространстве состояний. Для предложенного критерия разработана и апробирована соответствующая мера. Показано, что сложность всех гармонических сигналов конечной длительности – ограничена, и определяется амплитудно-частотной базой – величиной произведения амплитуды сигнала на его угловую частоту. Кроме того, выявлено, что именно области экстремумов сигнала вносят основной вклад в его сложность. Дополнительно проведено исследование применимости разработанной меры для расчёта сложности сигналов заданных временными рядами. Предварительно установлено, что для вычисления оценки сложности сигнала заданного временным рядом наилучшие результаты даёт способ получения оценок производных сигнала посредством вейвлет-регуляризации. Тем не менее, под данному вопросу требуется проведение дополнительных исследований.

ЛИТЕРАТУРА

[1]. Шень А.Х. // Семиотика и информатика. – М.: ВИНИТИ АН СССР, 1982. – Вып. 18. С.14.

[2]. Кравцов Ю.А. Случайность, детерминированность, предсказуемость. // УФН. 1989. Т.158, №1. С.93-122.

[3]. Леонтович М.А. Введение в термодинамику. Статистическая физика. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1983. – 416 с.

[4]. Шеннон К. Работы по теории информации и кибернетике. Пер. с англ. Под ред. Р.Л. Добрушина и О.Б. Лупанова, М., ИЛ, 1963.

[5]. Корнфельд И.П., Синай Я.Г. Энтропийная теория динамических систем. // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Том 2. Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР, М., 1985, 44-69 с.

[6]. Климонтович Ю.Л. Турбулентное движение и структура хаоса. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. – 320 с.

[7]. Колмогоров А.Н. Комбинаторные основания теории информации и исчисления вероятностей. // Успехи мат. наук. 1983. Т.38. Вып. 4. С.27-36.

[8]. Дарховский В.С., Каплан А.Я., Шишкин С.Л. О подходе к оценке сложности кривых (на примере электроэнцефалограммы человека). // АиТ. 2002. № 3. С. 134-140.

[9]. Астанин Л.Ю., Костылёв А.А. Основы сверхширокополосных радиолокационных измерений. – М.: Радио и связь, 1989. – 192 с.

[10]. Макаренко А.В. Геометрический подход к описанию и анализу динамической структуры сигнала. // XIII Зимняя школа-семинар по СВЧ-электронике и радиофизике. / Сборник трудов. – Саратов, СГУ. 2006г. (в печати).

[11]. Макаренко А.В. Об одном подходе к описанию и анализу формы и структуры сигнала. // Сверхширокополосные сигналы и сверхкороткие импульсы в радиолокации, связи, акустике (USUIRCA-2005): Сборник трудов международной научной конференции. – Суздаль, ВлГУ, 2005г.

[12]. Новиков С.П., Фоменко А.Т. Элементы дифференциальной геометрии и топологии. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит. 1987. – 432 с.

[13]. Патрикеев И.А., Степанов Р.А., Фрик П.Г. Вейвлет-регуляризация операции дифференцирования сигналов с шумом. // Вычислительные методы и программирование. 2005. Т.6. С.35-42.

[14]. Справочник по теории автоматического управления, под ред. А.А. Красовского. – М.: Наука. Гл. Ред. Физ.-мат. Лит., 1987. – 712 с.

[15]. Марковская теория оценивания в радиотехнике. / Под ред. М.С. Ярлыкова. – М.: «Радиотехника», 2004. – 504 с.