

ВЛИЯНИЕ НЕСТАБИЛЬНОСТИ ЧАСТОТЫ ДИСКРЕТИЗАЦИИ НА ПОМЕХОУСТОЙЧИВОСТЬ СИСТЕМЫ СВЯЗИ СО МНОГИМИ НЕСУЩИМИ

Казанцев А.А.

Ижевский государственный технический университет

В настоящее время модуляция со многими несущими (МСМ, OFDM) применяется для построения широкополосных и высокоскоростных систем связи [1]. Принцип OFDM заключается в разделении полосы частот неидеального фильтрового канала на множество подканалов так, что каждый подканал становится практически идеальным [2]. Элементы одного сообщения (кадра) передаются на нескольких десятках (сотнях, тысячах) поднесущих частотах по своему подканалу. Это позволяет решить проблему межсимвольной интерференции, повысить скорость передачи информации и эффективно использовать выделенную полосу частот. Платой за хорошие показатели является строгое требование сохранения ортогональности поднесущих. Ортогональность обеспечивается выбором оптимального расстояния между поднесущими, обратно пропорциональному скорости передачи символа [1,2]. В реальных условиях происходит нарушение ортогональности поднесущих и ухудшение качества работы системы OFDM. Одной из причин, ведущих к нарушению ортогональности поднесущих, является нестабильность частоты дискретизации сигнала в приемопередающей аппаратуре. Следовательно, необходимо оценить искажения, вызываемые нестабильностью частоты дискретизации, и возможность коррекции этих искажений.

Для формирования сигнала со многими несущими применяется обратное быстрое преобразование Фурье (ОБПФ). В этом случае передаваемый групповой сигнал в дискретном времени имеет вид [1,2]:

$$x(nT_s) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k \cdot e^{j\frac{2\pi}{T}nk}, \quad (1)$$

где X_k – передаваемый комплексный символ на k -ой поднесущей, N – размер БПФ, T – длительность символа, $t=nT_s$ – дискретное время, T_s – период дискретизации.

Длительность символа в системе OFDM определяется как:

$$T = NT_s = N / f_s, \quad (2)$$

где f_s – частота дискретизации.

В этом случае (1) примет вид:

$$x(nT_s) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k \cdot e^{j\frac{2\pi}{N}nk f_s}, \quad (3)$$

Демодуляция сигнала OFDM осуществляется с помощью прямого БПФ. При этом в результате нестабильности частоты дискретизации в передатчике и приемнике между ними возникает разность Δf_s . Тогда принимаемый сигнал m -ой поднесущей можно представить как:

$$\begin{aligned} Y_m &= \sum_{n=0}^{N-1} x(nT_s) \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}nm(f_s + \Delta f_s)} = \sum_{n=0}^{N-1} \left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k \cdot e^{j\frac{2\pi}{N}nk f_s} \right] \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}nm(f_s + \Delta f_s)} = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} X_k \cdot e^{j\frac{2\pi}{N}nk f_s} \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}nm(f_s + \Delta f_s)} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} X_k \cdot e^{j\frac{2\pi}{N}nk f_s} \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}nm f_s} \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}nm \Delta f_s} = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} X_k \cdot e^{j\frac{2\pi}{N}nk f_s} \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}nm f_s} \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}nm \Delta f_s} \end{aligned} \quad (4)$$

где $\varepsilon = \Delta f_s / f_s$ – относительная расстройка частоты дискретизации.

Для упрощения дальнейшего анализа (4) предположим, что $\varepsilon \ll 1$ и имеет величину порядка 10^{-8} – 10^{-3} . Мы вправе сделать такое предположение, так как современные кварцевые генераторы обладают высокоста-

бильными характеристиками. В этом случае $e^{-j\frac{2\pi}{N}nm \varepsilon}$ можно представить как:

$$e^{-j\frac{2\pi}{N}nm \varepsilon} \approx 1 - j \frac{2\pi nm}{N} \cdot \varepsilon \quad (5)$$

Подставляя (5) в (4), получим:

$$\begin{aligned} Y_m &\approx \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} X_k \cdot e^{j\frac{2\pi}{N}nk f_s} - \frac{j}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} X_k \cdot e^{j\frac{2\pi}{N}nk f_s} \cdot \frac{2\pi nm}{N} \cdot \varepsilon = \\ &= X_m - \frac{j}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} X_k \cdot \frac{2\pi nm \varepsilon}{N} \cdot e^{j\frac{2\pi}{N}nk f_s} = X_m + E_m \end{aligned} \quad (6)$$

Как видно из (6), принимаемый комплексный символ Y_m представляет собой сумму передаваемого сигнала X_m и помехи E_m , равной сумме произведений всех комплексных передаваемых символов и некоторой величины, зависящей от относительной расстройки частоты дискретизации ε . Рассмотрим два случая:

1. $m = k$. При этом сигнал помехи примет вид:

$$E_m = -X_m \cdot j \cdot \frac{2\pi m \varepsilon}{N^2} \sum_{n=0}^{N-1} n = -j \cdot X_m \cdot \Theta_m, \quad (7)$$

где $\Theta_m = \frac{2\pi m \varepsilon}{N^2} \sum_{n=0}^{N-1} n = \frac{2\pi m \varepsilon}{2N^2} \cdot N(N-1) \approx \pi m \varepsilon$.

Подставляя (7) в (6), получим:

$$Y_m \approx X_m - j \cdot X_m \cdot \Theta_m = X_m (1 - j \cdot \Theta_m) \quad (8)$$

Опираясь на ранее введенное допущение о малости ε , допустим также, что и Θ_m достаточно мало. Тогда (8) можно представить как:

$$Y_m \approx X_m (\cos(\Theta_m) - j \cdot \sin(\Theta_m)) = X_m \cdot e^{-j\Theta_m} \quad (9)$$

Из следует (9) вывод, что нестабильность частоты дискретизации приводит к повороту сигнального созвездия на некоторый угол Θ_m , который прямо пропорционален произведению номера поднесущей m и относительной расстройки частоты дискретизации ε . Направление поворота определяется знаком ε . Для проведения количественного анализа вернемся к выражению (4) без допущения о малости ε . Тогда принимаемый символ можно представить как:

$$Y_m = X_m \cdot \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi n}{N} m \varepsilon} \quad (11)$$

Сумма по n представляет собой БПФ по частоте с номером $m\varepsilon$ от импульса длительностью в N временных отсчетов и с амплитудой $1/N$. Как известно, такой импульс имеет спектр $\text{sinc}(m\varepsilon)$ [2]. Тогда (11) примет вид:

$$Y_m = X_m \cdot \text{sinc}(m\varepsilon) \quad (12)$$

Как видно из (12), сигнал каждой поднесущей поражается мультипликативной помехой, селективной по частоте. Зависимость модуля помехи от номера поднесущей представлена на рис.1.

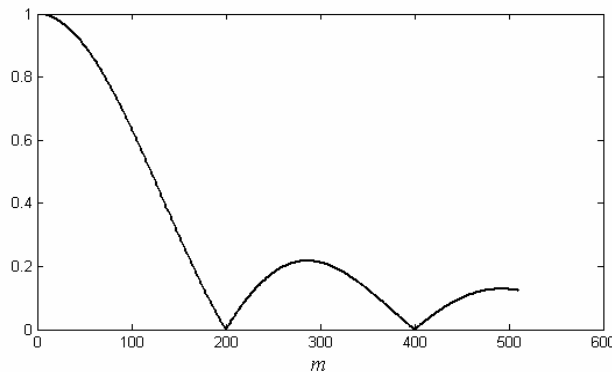


Рис.1. Зависимость модуля мультипликативной помехи от номера поднесущей m ($N=1024$, $\varepsilon=0,005$).

Из анализа рис.1. следует, что при увеличении номера поднесущей m амплитуда мультипликативной помехи уменьшается, соответственно, уменьшается и амплитуда полезного сигнала. Здесь можно выделить три области:

- а). Произведение $|m\varepsilon| \ll 1$. В этом случае величина $\text{sinc}(m\varepsilon) \approx 1$, амплитуда полезного сигнала уменьшается незначительно, и имеет место лишь поворот сигнального созвездия на угол Θ_m .
 - б) $0.1 < |m\varepsilon| < 1$. В этом случае амплитуда полезного сигнала уменьшается значительно, кроме того, имеет место поворот сигнального созвездия на большой угол Θ_m .
 - в) $|m\varepsilon| = 1, 2, 3 \dots n, n \in Z$. В таких точках величина $\text{sinc}(m\varepsilon) = 0$ и происходит полная потеря данных.
2. $m \neq k$. Тогда:

$$E_m = - \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq m}}^{N-1} X_k \frac{j}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{2\pi n m \varepsilon}{N} \cdot e^{j\frac{2\pi n}{N}(k-m)} \quad (13)$$

В этом случае помеха представляет собой суммарный сигнал сигнальных созвездий X_k от остальных $N-1$ поднесущих, умноженных на сумму произведений величин $\frac{2\pi n m \varepsilon}{N}$ и $e^{j\frac{2\pi n}{N}(k-m)}$. Эта помеха представляет собой результат межканальной интерференции (МКИ). Вследствие случайного характера передаваемых данных помеха имеет случайное распределение и при достаточно большом числе поднесущих ($N/2 > 100$) ее можно аппроксимировать как гауссовский случайный процесс. Найдем модуль этой помехи для случая модуляции каждой поднесущей с помощью четырехпозиционной относительной фазовой манипуляции (4ОФМ, или QPSK). При этом модуль каждого сигнального созвездия X_k одинаков для всех поднесущих. Тогда:

$$\begin{aligned} |E_m| &= \frac{2\pi m \varepsilon}{N^2} \left| \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq m}}^{N-1} |X_k| \cdot e^{j\varphi_k} \cdot e^{-j\frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{N-1} n} \cdot e^{j\frac{2\pi n}{N}(k-m)} \right| = \frac{2\pi m \varepsilon}{N^2} |X_k| \left| \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq m}}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} n \cdot e^{j(\frac{2\pi n}{N}(k-m) + \varphi_k - \frac{\pi}{2})} \right| = \\ &= \frac{2\pi m \varepsilon}{N^2} |X_k| \left| \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq m}}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} \left[n \cdot \cos\left(\frac{2\pi n}{N}(k-m) + \varphi_k - \frac{\pi}{2}\right) + j \cdot n \cdot \sin\left(\frac{2\pi n}{N}(k-m) + \varphi_k - \frac{\pi}{2}\right) \right] \right| = \\ &= \frac{2\pi m \varepsilon}{N^2} |X_k| \sqrt{\left[\sum_{\substack{k=0 \\ k \neq m}}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} n \cdot \sin\left(\frac{2\pi n}{N}(k-m) + \varphi_k\right) \right]^2 + \left[\sum_{\substack{k=0 \\ k \neq m}}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} n \cdot \cos\left(\frac{2\pi n}{N}(k-m) + \varphi_k\right) \right]^2} \quad (14) \end{aligned}$$

Соответственно, отношение сигнал/шум (ОСШ) для m -ой поднесущей можно будет иметь вид:

$$\gamma_m = \left[\frac{2\pi m \varepsilon}{N^2} \sqrt{\left[\sum_{\substack{k=0 \\ k \neq m}}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} n \cdot \sin\left(\frac{2\pi n}{N}(k-m) + \varphi_k\right) \right]^2 + \left[\sum_{\substack{k=0 \\ k \neq m}}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} n \cdot \cos\left(\frac{2\pi n}{N}(k-m) + \varphi_k\right) \right]^2} \right]^{-1} \quad (15)$$

График зависимости γ_m от m представлен на рис.2.

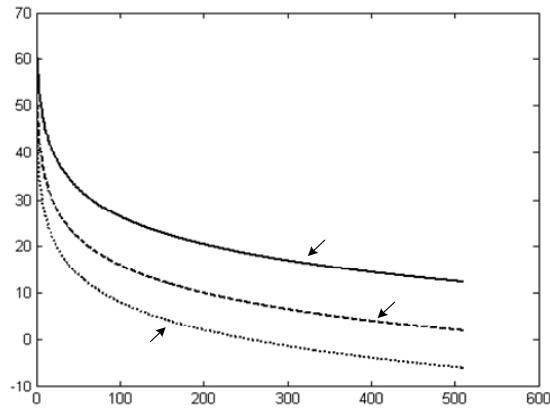


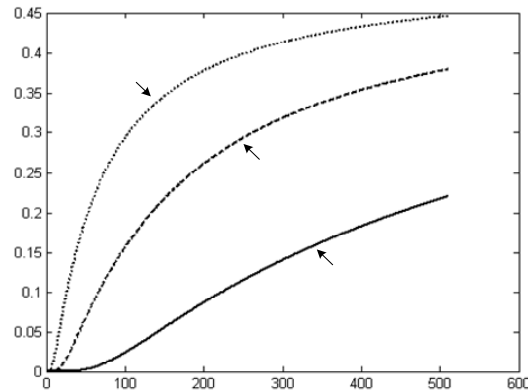
Рис.2. Зависимость ОСШ γ_m от номера поднесущей m при различных ε ($N=1024$).

Как видно рис.2, что с увеличением номера поднесущей m величина ошибки, вносимой МКИ, увеличивается. Соответственно, уменьшается значение ОСШ. Кроме того, при увеличении значения ε в 5 раз, разница в ОСШ для одной и той же поднесущей составляет в среднем до 10 дБ.

Построим график зависимости вероятности ошибки на символ при учете как МКИ, так и поворота фазового созвездия. Расчет проведем по формулам из [2]:

$$\begin{aligned} p &= Q_1(a, b) - 0.5 \cdot I_0(a \cdot b) \cdot e^{-0.5 \cdot (a^2 + b^2)} \\ a &= \sqrt{\gamma_m \cdot (1 - \sqrt{0.5})}, \quad b = \sqrt{\gamma_m \cdot (1 + \sqrt{0.5})} \quad (16) \end{aligned}$$

где Q_1 — функция Маркума, I_0 — модернизированная функция Бесселя 1-го рода нулевого порядка.



$\varepsilon=0.0025$

Рис.3. Зависимость вероятности ошибки на символ для 4ОФМ от номера поднесущей m при различных ε ($N=1024$).

Из анализа рис.3 следует, что вероятность ошибки существенно возрастает при увеличении номера поднесущей и значения относительной расстройки частоты дискретизации ε . При этом видно, что при значениях $\varepsilon > 10^{-4}$ вероятность ошибки в результате совместного действия МКИ и фазового сдвига, достаточно велика.

Для устранения влияния нестабильности частоты дискретизации в системе OFDM необходимо предусмотреть соответствующий блок коррекции. Один из методов основан на преобразовании ошибки из частотной области во временную, оценки временного сдвига и последующей его коррекции. Другой способ заключается в оценке разницы между частотами дискретизации в передатчике и приемнике и соответствующей подстройке частоты дискретизации. Для этого необходимо, чтобы в приемнике частота дискретизации задавалась управляемым генератором.

Выводы.

1. Нестабильность частоты дискретизации приводит к повороту сигнального созвездия и межканальной интерференции.
2. Угол поворота прямо пропорционален произведению номера поднесущей m и относительной расстройки частоты дискретизации ε . Направление поворота определяется знаком ε . При очень больших значениях ε ($\varepsilon > 10^{-3}$) происходит существенное ослабление амплитуды поднесущих. Кроме того, в точках $|m\varepsilon|=1,2,3..n, n \in Z$, происходит полная потеря данных.
3. Модуль помехи, возникающей вследствие МКИ, также возрастает с увеличением номера поднесущей m .
4. Исходя из анализа графика зависимости вероятности ошибки для 4ОФМ, максимально допустимым значением ε , при котором система со многими несущими может функционировать, является 10^{-4} .

Литература

1. M. Saito, S. Moriyama, O. Yamada. A digital modulation for terrestrial digital TV broadcasting using trellis coded OFDM and its performance.-IEEE Transactions on broadcasting, vol. 92, no.2, pp. 1694-1695, June 1992.
2. Прокис Дж. Дж. Цифровая связь. Пер. с англ./Под ред. Д.Д. Кловского.- М.: Радио и Связь, 2000, стр. 800.

INFLUENCE OF SAMPLING FREQUENCY'S INSTABILITY ON NOISE-IMMUNITY OF MULTICARRIER SYSTEM

Kazantsev A.

Izhevsk State Technical University

At present time Multicarrier modulation technique (MCM, OFDM) is used for making of wideband and high rate communications systems [1].

Principle of OFDM is concluded in division of the frequency band of fading channel on great number of subchannels so that each subchannel becomes practically ideal [2].

This allows to solve a intersymbol interference problem, raise information send rate and effectively use chosen band of the frequencies. Charge per good factors is a strict requirement of conservation of the subcarriers orthogonality.

In real conditions occurs breach of the subcarriers orthogonality and deterioration of quality of OFDM system performance. One of the reasons, leading to breach of the subcarriers orthogonality, is sampling rate instability in transceiver equipment.

At present work is researched influence of sampling frequency's instability on noise-immunity of Multicarrier system.

It is considered system, in which information is sending by 512 subcarriers. Accordingly, number of points for Fast Fourier Transform (FFT) is 1024. Noise-immunity of the OFDM system was researched under different values relative offset of sampling rate ε .

Was realized that sampling rate instability brings to rotation of the signal constellation on determined angle.

The formula was obtained for computing of angle value at dependency from subcarrier's index m and value of relative offset of sampling rate ε . Direct of rotation is defined by sign of ε .

Was showed, that under very large values of ε ($\varepsilon > 10^{-3}$) occurs essential weakening of the subcarrier's amplitude, and at points $|m\varepsilon|=1,2,3..n, n \in \mathbb{Z}$, occurs full data loss.

Besides, under present of sampling frequency's instability is occurred interchannell interference (ICI). As a result of ICI actions, on useful signal of subcarrier with index m is superimposed information from other subcarriers.

In consequence of casual nature of sending data this hindrance has a casual distribution and under enough large numbers of subcarriers ($N/2 > 100$) it possible approximate as Gaussian casual process.

Was made calculation of signal to noise ratio (SNR) for event, when each subcarriers is modulated by quadrature phase shift keying (QPSK). Was realized, that absolute value of obstacle, occurring in consequence of ICI, increases with increasing of subcarrier index m . Respectively, SNR reduce with increasing of subcarrier index m and more quickly, than bigger ε .

Was made calculation dependency of symbol error rate (SER) (under signal constellation rotation and present of ICI) from subcarrier index m . Coming from analysis of the SER dependency for QPSK, greatly possible importance of ε , under which system with many carrying can still working, is 10^{-4} .

References

1. M. Saito, S. Moriyama, O. Yamada. A digital modulation for terrestrial digital TV broadcasting using trellis coded OFDM and its performance.-IEEE Transactions on broadcasting, vol. 92, no.2, pp. 1694-1695, June 1992.
2. Proakis J.G. Digital Communications. Under ed. D. D. Klovskiy. - M.: Radio and Link, 2000, p. 800.

