

## СИНТЕЗ МНОГОМЕРНОЙ ОПТИМАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ КОРРЕКЦИИ ФАЗЫ В КАНАЛЕ OFDM

Казаков Л.Н., Кукушкин Д.С.

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, Ярославль

### Введение

В силу ряда известных преимуществ, технология OFDM нашла широкое применение во многих цифровых системах передачи данных, например, в беспроводных локальных сетях передачи данных (IEEE802.11a, IEEE802.11g); беспроводных корпоративных сетях (IEEE 802.16); в передаче данных для цифрового наземного телевиденья (DVB-T). В то же время, технология OFDM очень чувствительна к ошибкам синхронизации. Последние могут быть вызваны нестабильностью фазовой характеристики канала, фазовыми флуктуациями сигналов генераторов на передающей и приемной сторонах. В результате возникает случайный фазовый сдвиг, который приводит как к одинаковому для всех подканалов повороту QAM созвездия, так и к появлению межканальной интерференции. Известен ряд подходов по построению систем компенсации фазового сдвига [1-3,7], но все они не учитывают спектральных характеристики фазового шума и не являются оптимальными. В работе на основе изложенного в [4] подхода построена модель системы коррекции фазы в канале OFDM в форме многомерного фильтра Калмана.

### Математическая модель

Входной QAM-сигнал на приемной стороне, после преобразования Фурье можно записать в виде [1]:

$$R_{m,l} = X_{m,l} H_{m,l} I_m(0) + \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq l}}^{N-1} X_{m,j} H_{m,j} I_m(l-j) + n_{m,l}, \quad (1)$$

где  $m$  - номер OFDM символа,  $l$  - номер поднесущей,  $X_{m,l}$  - передаваемый QAM символ,  $H_{m,j}$  - передаточная характеристика канала,  $n_{m,l}$  - аддитивный белый гауссовский шум (АБГШ),

$$I_m(k) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} e^{-i2\pi jk/N} e^{i\phi(j)}, \quad (2)$$

где  $\phi(j)$  - фазовый шум.

В случае малого фазового шума (1) можно переписать в виде [2]:

$$R_{m,l} = X_{m,l} + \frac{i}{N} \sum_{j=0}^{N-1} X_{m,l} \sum_{k=0}^{N-1} \phi(n) e^{i(2\pi/N)(j-l)k} + n_{m,l}. \quad (3)$$

Из (1) следует, что низкочастотная составляющая фазового шума приводит к общему для всех подканалов повороту созвездия QAM, а высокочастотная к межканальной интерференции, влияние которой эквивалентно действию АБГШ [2]. С учетом этого, (3) можно записать в виде:

$$R_{m,l} = X_{m,l} + i(\psi_m X_{m,l}) + n'_{m,l},$$

где  $n'_{m,l} = \frac{i}{N} \sum_{j=0}^{N-1} X_{m,l} \sum_{k=0}^{N-1} \phi(n) e^{i(2\pi/N)(j-l)k} + n_{m,l}$  - АБГШ,  $\psi_m = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \phi(n)$  - общий для всех подканалов фазовый сдвиг.

Задача системы коррекции фазы состоит в компенсации низкочастотной составляющей фазового шума  $\psi(m)$ . В качестве модели фазового шума примем модель белого частотного шума [6]. Постановку задачи в линейном варианте иллюстрирует рис 1.

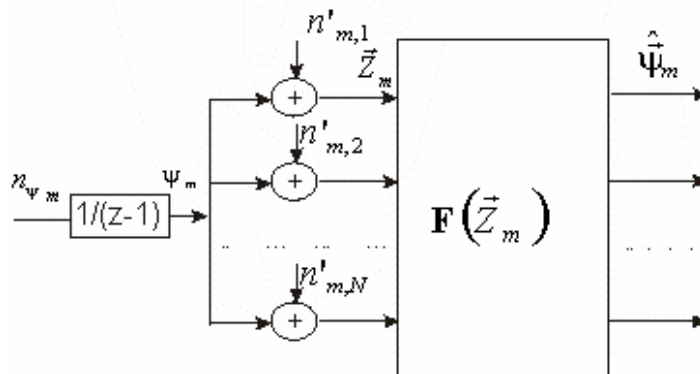


Рис.1. Структурная схема линейризованной модели системы коррекции фазы.

Построим оптимальную систему коррекции фазы, используя методику синтеза предложенную в [4]. Основная идея методики заключается в априорном введении фазового детектора и последующем использовании алгоритма линейной оптимальной цифровой фильтрации Калмана.

В нашем случае фазовый детектор является многомерным и представляет собой совокупность детекторов с пилообразной характеристикой в каждом из подканалов. Такой вариант фазового детектора предполагает, что на вход системы коррекции фазы поступает сигнал в виде вектора, с размерностью равной количеству используемых подканалов. Вектор входного воздействия представляет собой смесь оцениваемого сигнала одинакового для всех элементов вектора и независимого для всех подканалов АБГШ.

Для применения теории оптимальной фильтрации Калмана входной сигнал должен удовлетворять двум условиям.

Во-первых, оцениваемый параметр должен описываться с помощью формирующего уравнения:

$$\psi_m = \Phi \psi_{m-1} + \mathbf{G} u_m, \quad (4)$$

где  $\psi$  - вектор состояния системы,  $u$  - гауссова случайная последовательность с нулевым средним и ковариационной матрицей  $\mathbf{Q}$ ,  $\Phi$  - переходная матрица,  $\mathbf{G}$  - матрица возмущений.

Во-вторых, разностное векторное уравнение наблюдения должно быть представимо в виде:

$$\begin{cases} \bar{z}_m = \mathbf{H} \bar{\psi}_m + \bar{v}_m \\ \left( \begin{array}{c} \bar{v}_i \bar{v}_j^T \end{array} \right) = \begin{cases} \mathbf{R}, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \end{cases} \quad (5)$$

где  $\bar{z}$  - вектор на входе системы,  $\bar{v}$  - белый гауссовый шум с нулевым средним и ковариационной матрицей  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{H}$  - матрица наблюдений.

Уравнение оптимального корректора фазы в этом случае будет иметь вид:

$$\hat{x}_m = \Phi \hat{\psi}_{m-1} + k_m [z_m - \mathbf{H} \Phi \hat{\psi}_{m-1}], \quad \hat{\psi}_0 = \bar{\psi}_0, \quad (6)$$

где  $\bar{\psi}_0$  - начальная априорная оценка вектора состояния,  $k_m$  - коэффициент усиления, выражаемый:

$$k_m = \mathbf{P}_m^* \mathbf{H}^T [\mathbf{H} \mathbf{P}_m^* \mathbf{H}^T + \mathbf{R}]^{-1}, \quad (7)$$

$$\mathbf{P}_m^* = \Phi \mathbf{P}_{m-1} \Phi^T + \mathbf{G} \mathbf{Q} \mathbf{G}^T, \quad (8)$$

$$\mathbf{P}_m = [\mathbf{I} - k_m \mathbf{H}] \mathbf{P}_m^* \quad (9)$$

Так как в качестве модели фазового шума принят белый частотный шум, одинаковый во всех подканалах, коэффициенты в уравнении формирующего фильтра имеют вид:

$$\Phi = \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \sigma_\psi^2 \mathbf{I}, \quad (10)$$

где  $\sigma_\psi^2$  - дисперсия фазового шума.

Положим, что предварительная оценка передаваемых символов выполнена, либо в качестве используемых поднесущих выбраны пилотные. В этом случае уравнение наблюдения (5) примет вид (11):

$$\bar{z}_m = \mathbf{H} \bar{\psi}_m + \bar{v}_m, \quad \text{где } \mathbf{R} = \sigma_n^2 \mathbf{I}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{I}, \quad (11)$$

где  $\sigma_n^2$  - дисперсия АБГШ, с учетом действия межканальной интерференции.

Алгоритм оценивания с учетом соответствующих преобразований будет иметь вид:

$$\hat{\psi}_m = \hat{\psi}_{m-1} + k_m [\bar{z}_m - \hat{\psi}_{m-1}] \quad (12)$$

$$k_m = \mathbf{P}_m^* [\mathbf{P}_m^* + \sigma_n^2 \mathbf{I}]^{-1}, \quad (13)$$

$$\mathbf{P}_m^* = \mathbf{P}_{m-1} + \sigma_\psi^2 \mathbf{G} \mathbf{G}^T, \quad (14)$$

$$\mathbf{P}_m = (1 - k_m) \mathbf{P}_m^*. \quad (15)$$

### Анализ результатов

Согласно уравнений оптимального фильтра (12) – (15) была реализована его имитационная модель. В качестве оценки качества работы системы рассматривались статистические характеристики сигнала фазовой ошибки  $\vec{y}_m$ :

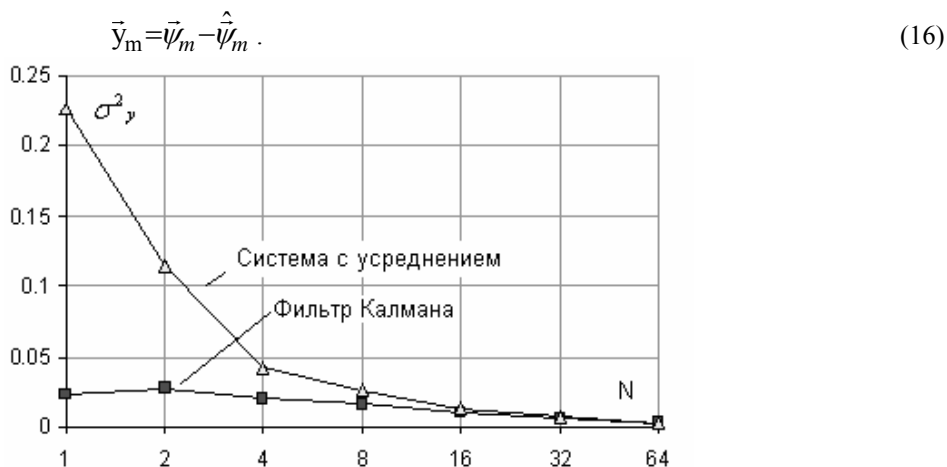


Рис. 2. Зависимость дисперсии фазовой ошибки от количества поднесущих при  $\sigma_{\psi}^2 = 0.1$ ;  $\sigma_n^2 = 0.2$ .

На рис. 2 приведено сравнение зависимости дисперсии фазовой ошибки для полученной системы и стандартной, в основе работы которой лежит усреднение по всем подканалам. Качественно характер графика справедлив для широкого диапазона мощностей входных сигналов.

Видно, что первая система имеет существенный выигрыш для малого числа поднесущих. Это особенно актуально для некоторых стандартов, например, стандарта IEEE802.11a, предписывающего использование четырех пилотных поднесущих. Обе системы характеризуются снижением величины фазовой ошибки с увеличением числа подканалов. Очевидно, этот факт связан с увеличением объема статистики, используемой при принятии решения о величине фазовой ошибки, при увеличении числа поднесущих. Из этого следует вывод о предпочтительности методик компенсации групповой фазовой ошибки, использующих в своей работе все поднесущие, а не только пилотные.

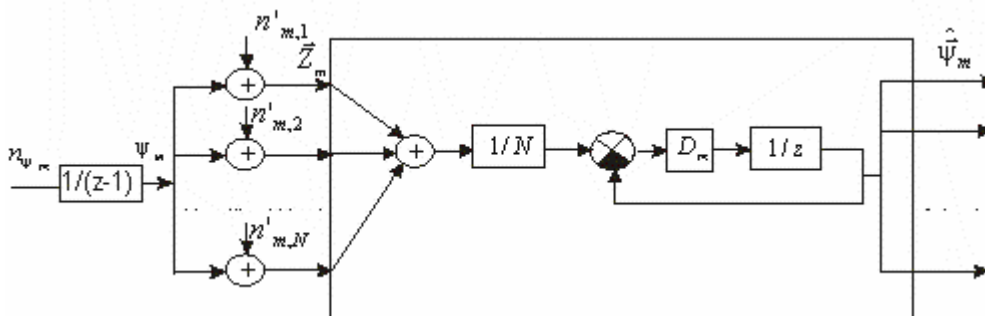


Рис.3. Функциональная схема фильтра Калмана.

Детальный анализ уравнений (12-15) показывает, что все элементы матрицы коэффициента усиления имеют одинаковые значения. Это означает, что система осуществляет усреднение входного сигнала с дальнейшей обработкой подобно одномерной системе фазовой синхронизации с адаптивным коэффициентом усиления и статистическим фазовым детектором [5]. Полученная система эквивалентна предложенной в [4], с той разницей, что коэффициент усиления предлагаемой системы адаптивен. Функциональная схема системы приведена на рис. 3.

### Литература

1. D. Petrovic, W. Rave, and G. Fettweis. Phase noise suppression in OFDM using a Kalman filter. In Proc. IEEE WPMC, volume 3, pages 375-379. Yokosuka, Japan, 19.-22. October 2003.
2. A.G. Armada, Understanding the Effects of Phase Noise in Orthogonal Frequency Division Multiplexing (OFDM), IEEE Trans. on Broadcasting, vol. 47, no. 2, 2001.
3. V.S. Abhayawardhana, I.J. Wassel Common Phase Error Correction with Feedback for OFDM in Wireless Communication, IEEE Global Communications Conference (GLOBECOM 2002), November 2002.
4. В.П. Сизов. Синтез оптимальных линейных моделей цифровых систем фазовой автоподстройки. Радиотехника и электроника №9. С. 1886-1893. Москва, 1974.

5. Александров А.С., Кукушкин Д.С., Шабанов А.В. Применение Марковской модели для исследования системы восстановления фазы в канале OFDM. 7-я международная конференция «Цифровая обработка сигналов и ее применение» Сборник докладов. Москва 2005. С. 21-25

6. Рыжков А.В., Попов В.Н. Синтезаторы частот в технике радиосвязи. – М.: Радио и связь, 1991.

7. D. Petrovic, W. Rave, and G. Fettweis. Intercarrier Interference due to Phase Noise in OFDM - Estimation and Suppression In Proceedings of the 60th IEEE Vehicular Technology Conference (VTC'04 Fall). Los Angeles, California, 26.-29. September 2004.

---

## THE SYNTHESIS OF OPTMALLY SYSTEM OF PHASE RECOVERY IN OFDM

Kazakov L., Kukushkin D.

Yaroslavl State University

Abstract. Synthesis of the multidimensional Kalman filter which compensates the influence of common phase error in OFDM system is performed in this paper. The feature of the paper is using vector model of signal and taking to account spectral performance of phase noise. This was allowed to obtain system model which is adequate to the input signal. Results of performances comparison of the obtained system and conventional system which use averaging over subcarriers are showed.

It is well known that OFDM is effective modulation method for frequency selective fading channels [2-4]. OFDM is wide spread in many communication fields both in wires (xDSL, for example) and in wireless (IEEE802.11a, for example). However, OFDM is very sensitive to synchronization errors. For example, they may be caused by the noise of used oscillators. Noise of oscillators leads to phase shift which is same for all OFDM subchannels. This noise is named common phase error (CPE). Some techniques to obtaining of the system which compensates phase shift [2-3] are some known. But all of them don't take to account of phase noise spectral performance and they are not optimum.

The technique of synthesis of system which is free from referred above defect is proposed in this paper. Approach proposed in [1] is taken as a basis for the technique. The main idea of the approach is introduction of phase detector at the first and using theory of optimal Kalman filtration at the end.

In our case, the phase detector is multidimensional and represented by group of detectors which have saw tooth nonlinearity. Moreover, each detector is corresponding to single subchannel. In this case input signal is represented by a vector. Dimensional of the vector is equal to number of used subchannels. The Input signal is sum of estimated signal which is equal to all elements of vector and additive white Gaussian noise (AWGN) which is independent for all subchannels.

According to obtained model of optimum filter the simulation model was realized. The performance of system was being estimated by statistical performances of phase error.

From analysis of behavior of phase error both for obtained system and conventional which averaging over subcarriers for decision was found, that first system have essential advantage for small (about 8) number of subchannel. It is especially actually for some popular standards, for example IEEE 802.11a, which enforce use four pilot subcarriers.

Increase of number of subchannels lead to decrease of phase error and this fact is typical for both systems. It is evident, that this fact follows from the fact, that increase of subchannels number lead to increase of statistical quantity. Therefore, the techniques, which use all subcarriers and not only pilot are more preferably.

### Bibliography

1. V.P. Sizov. The synthesis of optimal lineal models of digital phase locked loops. Radiotekhnika I Elektronika №9. p.p. 1886-1893. Moscow, 1974.
2. D. Petrovic, W. Rave, and G. Fettweis. Phase noise suppression in OFDM using a Kalman filter. In Proc. IEEE WPMC, volume 3, pages 375-379. Yokosuka, Japan, 19.-22. October 2003.
3. V.S Abhayawardhana, I.J. Wassel Common Phase Error Correction with Feedback for OFDM in Wireless Communication, IEEE Global Communications Conference (GLOBECOM 2002), November 2002.
4. Alexandrov A.S., Kukushkin D.S., Shabanov A.V. Application of markov model for analysis of carrier phase recovery system for OFDM channel. 7-th International conference «Digital signal processing and its application». p.p. 21-25. Moscow, 2005.