ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СПЕКТРАЛЬНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ СИГНАЛОВ И СИСТЕМ НА ОСНОВЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА ДЛЯ АНАЛИЗА ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Мокеев А.В.
Архангельский государственный технический университет

Спектральные представления сигналов и систем на основе преобразования Фурье широко используется для анализа линейных систем. В случае входных сигналов, описываемых совокупностью конечного количества синусоидальных составляющих, спектр состоит из отдельных дискретных линий. Поэтому установившееся значение реакции линейной системы в этом случае можно определить исходя из физического смысла частотных характеристик [1].

Спектр непериодического входного сигнала сплошной и состоит из бесконечной последовательности синусоидальных составляющих. Поэтому использовать частотные характеристики в этом случае можно только лишь для качественной оценки прохождения сигнала через линейную систему.

При этом следует отметить, что большинство реальных входных сигналов автоматических систем управления могут быть описаны в виде совокупности затухающих колебательных составляющих

$$x(t)=\sum_{i=0}^{n} X_{mi}\cdot e^{-\beta_i\cdot t}\cos(\omega_i\cdot t-\varphi_i)\,. \tag{1}$$

Частными случаями затухающей колебательной составляющей

$$x_i(t)=X_{mi}\cdot e^{-\beta_i\cdot t}\cos(\omega_i\cdot t-\varphi_i) \tag{2}$$

являются синусоидальный, экспоненциальный и постоянный сигналы.

Представление сигнала в виде синусоидальных, прямоугольных или иных составляющих должно определяться физической целесообразностью [1,2]. Для входных сигналов, описываемых выражением (1), целесообразно использовать преобразования, позволяющее представить сигнал в виде совокупности затухающих колебательных составляющих. Такую возможность предоставляет преобразование Лапласа. Но в практической деятельности преобразование Лапласа используется только как инструментарий для алгебраизации дифференциальных уравнений, а спектральные представления на базе преобразования Лапласа используются только лишь для иллюстрации расположения нулей и полюсов передаточной функции [3].

При использовании преобразования Лапласа сигнал вида (1) можно представить в виде конечного числа затухающих колебательных. Поэтому по аналогии с преобразованием Фурье, можно достаточно просто получить аналитическую зависимость для определения принужденной составляющей выходного сигнала системы.

Для получения амплитудно-частотной и фазово-частотной характеристик линейной системы по Лапласу необходимо выполнить в выражения для передаточной функции системы K(p) подстановку $p\rightarrow -\gamma+j\cdot\omega$. При этом амплитудно-частотная и фазово-частотная функции зависят не только от частоты, но и от вещественной части оператора Лапласа. Поэтому далее будем использовать следующие обозначения для указанных выше функций

$$K(-\gamma,\omega)=\left|K(-\gamma+j\omega)\right|, \tag{3}$$

$$F(-\gamma,\omega)=\arg K(-\gamma+j\omega)\,. \tag{4}$$

В соответствии с выражением для обратного преобразования Лапласа реакция линейной системы на *i*-ю составляющую входного сигнала (2) может быть описана следующим образом

$$y_i(t)=\frac{1}{2\cdot\pi}\cdot\int_0^{+\infty} K(-\gamma+j\cdot\omega)\cdot X_i(-\gamma+j\cdot\omega)\cdot e^{(-\gamma+j\cdot\omega)\cdot t}\cdot d\omega\,, \tag{5}$$

где изображение *i*-й составляющей входного сигнала

$$X_i(p)=X_{mi}\frac{(p+\beta_i)\cdot\cos(\varphi_i)+\omega_i\cdot\sin(\varphi_i)}{(p+\beta_i)^2+\omega_i^2}\,.$$

Так же как и для передаточной функции, для получения спектральной плотности i-й составляющей входного сигнала выполним подстановку $p\rightarrow -\gamma+j\cdot\omega$

$$X_i(-\gamma,\omega)=X_{mi}\frac{(-\gamma+j\cdot\omega+\beta_i)\cdot\cos(\varphi_i)+\omega_i\cdot\sin(\varphi_i)}{(-\gamma+j\cdot\omega+\beta_i)^2+\omega_i^2}\,.$$

При $\gamma=\beta_i$ получим следующее выражении для спектральной плотности

$$X(-\beta_i+j\cdot\omega)=Xm\frac{(\omega_0\sin\varphi+j\omega\cos\varphi)}{\omega_0^2-\omega^2}\;+\;Xm\frac{\pi}{2}\Big[e^{-j\cdot\varphi}\delta(\omega_0-\omega)\;+\;e^{j\cdot\varphi}\delta(\omega+\omega_0)\Big]\,. \tag{6}$$

Полученное выражение в точности совпадает с выражением для синусоидального сигнала при использовании одностороннего преобразовании Фурье [2,4]. Первое слагаемое полученного выражения содержит информацию о переходном процессе в системе, связанном с подачей i-й составляющей входного сигнала в нулевой момент времени, а второе слагаемое характеризует принужденную составляющую выходного сигнала системы.

Подставляя второе слагаемое полученного выражения (6) в выражение для обратного преобразования Лапласа (5) с учетом фильтрующего действия дельта-функции получим

$$y_{\text{пр}\,i}(t) = X_{mi} \cdot K(-\beta_i, \omega_i) \cdot e^{-\beta_i \cdot t} \cos(\omega_i \cdot t - \varphi_i + F(-\beta_i, \omega_i)) . \qquad (7)$$

Физический смысл амплитудно-частотной и фазово-частотной функций, полученных с помощью преобразования Лапласа, аналогичен классическим одноименным частотным характеристикам, но речь о существенно расширенном перечне типов сигналов и их комбинаций: постоянная, экспоненциальная, синусоидальная и затухающая колебательная составляющие.

Представим для наглядности физический смысл частотных характеристик при использовании преобразования Лапласа для i-й составляющей входного сигнала (2) в виде следующей структурной схемы

$$x_i(t) = X_{mi} \cdot e^{-\beta_i \cdot t} \cdot \cos(\omega_i \cdot t - \varphi_i) \;\longrightarrow\; \boxed{K(p)} \;\longrightarrow\; y_{\text{пр}\,i}(t) = X_{mi} K(-\beta_i, \omega_i) e^{-\beta_i \cdot t} \cos(\omega_i t - \varphi_i + \arg K(p_i))$$

Рис. 1. Определение принужденной составляющей

На представленной рис. 1 схеме используются следующие обозначения

$$p_i = -\beta_i + j \cdot \omega_i , \quad K(-\beta_i, \omega_i) = \left| K(p_i) \right| .$$

Физический смысл частотных характеристик, получаемых с помощью преобразования Лапласа, можно сформулировать следующим образом. Если на вход линейной системы с передаточной функцией *K(p)* подан входной сигнал в виде i-й затухающей колебательной составляющей, то принужденная составляющая реакции системы будет также в виде затухающей колебательной составляющей, причем относительно входного сигнала ее уровень измениться на значение амплитудно-частотной функции при $p_i = -\beta_i + j \cdot \omega_i$, а начальная фаза изменится на значение фазово-частотной функции при тех же условиях.

Таким образом, на основе частотных характеристик можно определить принужденную составляющую выходного сигнала системы при входном сигнале, описываемом затухающей колебательной составляющей или совокупностью указанных составляющих.

Возникает вопрос о возможности определения свободной составляющей на основе спектральных представлений сигналов и линейных систем.

Для решения поставленной задачи воспользуемся следующим подходом: описания входных воздействий (сигналов) и линейных систем управления как во временной, так и в частотной области похожи между собой, в этом плане говорят дуализме сигнал-система [5].

Как и входное воздействие (сигнал), весовая функция для абсолютного большинства физически реализуемых линейных систем может быть описана в виде совокупности затухающих колебательных составляющих

$$g(t) = \sum_{i=0}^{m} g_i(t) = \sum_{i=0}^{m} k_i \cdot e^{-\alpha_i \cdot t} \cos(w_i \cdot t - \phi_i) . \qquad (8)$$

При этом выражение для передаточной функции системы с весовой функцией вида (8) будет иметь следующий вид

$$K(p) = \sum_{i=0}^{m} K_i(p) = \sum_{i=0}^{m} k_i \frac{(p + \alpha_i) \cdot \cos(\phi_i) + w_i \cdot \sin(\phi_i)}{(p + \alpha_i)^2 + w_i^2} . \qquad (9)$$

Повторяя те же выкладки, что и ранее, используя выражения для обратного преобразования Лапласа, получим следующее выражение для i-й свободной составляющей

$$y_{\text{св}\,i}(t) = k_i \cdot X(-\alpha_i, \omega_i) \cdot e^{-\alpha_i \cdot t} \cos(w_i \cdot t - \varphi_i + \arg X(-\alpha_i + j \cdot w_i)) . \qquad (10)$$

Полученное выражение для наглядности отобразим в виде структурной схемы. Для этого переставим местами в структурной схеме, приведенной на рис. 1, входное воздействие и описание системы. При этом вместо входного воздействия будет фигурировать импульсная функция в виде затухающей колебательной составляющей, а вместо передаточной функции – изображение входного сигнала.

$$g_i(t) = k_i \cdot e^{-\alpha_i \cdot t} \cdot \cos(w_i \cdot t - \phi_i) \;\longrightarrow\; \boxed{X(p)} \;\longrightarrow\; y_{\text{св}\,i}(t) = k_i X(-\alpha_i, w_i) e^{-\alpha_i \cdot t} \cos(w_i t - \varphi_i + \arg X(p_i))$$

Рис. 1. Определение свободной составляющей

На представленной рис. 2 схеме используются следующие обозначения

$p_i = -\alpha_i + j\cdot w_i$, $X(-\alpha_i, w_i) = \left|X(p_i)\right|$.

Свободная составляющая выходного сигнала при этом будет иметь тот же вид, что и весовая функция. При этом в отличии от последней, ее уровень измениться на значение модуля изображения входного сигнала при подстановке $p_i = -\alpha_i + j\cdot w_i$, а начальная фаза изменится на значение аргумента *X(p)* при тех же условиях.

Таким образом, получили следующее выражение для расчета реакции линейной системы с передаточной функцией (9) на входное воздействие, описываемое с помощью совокупности затухающих колебательных составляющих согласно (1)

$$y(t) = \sum_{i=0}^{n} X_{mi}\cdot K(-\beta_i,\omega_i)\cdot e^{-\beta_i\cdot t}\cos(\omega_i\cdot t - \varphi_i + F(-\beta_i,\omega_i)) +$$

$$\sum_{i=0}^{m} k_i\cdot X(-\alpha_i,\omega_i)\cdot e^{-\alpha_i\cdot t}\cos(w_i\cdot t - \varphi_i + \arg X(-\alpha_i + j\cdot w_i)). \qquad (11)$$

В качестве иллюстрации предлагаемого метода анализа как стационарных, так и нестационарных процессов в линейных системах, рассмотрим следующий пример.

Требуется определить реакцию системы с передаточной функцией

$$K(p) = \frac{k_1\cdot p^2}{(p^2 + 2\alpha_1 p + w_1^2)(p+\alpha_2)}$$

на следующее входное воздействие

$$x(t) = X_m(\cos\omega_1\cdot t) - \mathrm{e}^{-\beta\cdot t}.$$

Для решения поставленной задачи необходимо предварительно получить выражение для импульсной функции системы и изображение входного сигнала.

Для рассматриваемой передаточной функции импульсная функция имеет следующий вид

$$g(t) = k_1\cdot \mathrm{e}^{-\alpha_2\cdot t} + k_2\mathrm{e}^{-\alpha_2\cdot t}\sin(w_1\cdot t + \phi_1),$$

где коэффициенты k_1, k_2 и начальный угол ϕ_1 определяются согласно следующих выражений

$$k_1 = \frac{\alpha_2^2}{(\alpha_1^2-\alpha_2^2)^2 + w_1^2},\quad k_2 = \frac{\sqrt{4w_1^2\alpha_1^2 + (w_1^2-\alpha_2^2)^2}}{\alpha_1\sqrt{(\alpha_1^2-\alpha_2^2)^2 + w_1^2}},\quad \phi_1 = arctg\frac{w_1}{\alpha_1-\alpha_2} + \mathrm{arctg}\frac{2w_1\alpha_1}{w_1^2-\alpha_2^2},$$

Изображение входного сигнала

$$X(p) = \frac{X_m\cdot p}{p^2+\omega_1^2} - \frac{X_m}{p+\beta} = X_m\frac{\beta\cdot p - \omega_1^2}{(p^2+\omega_1^2)(p+\beta)}.$$

Принужденную составляющую определим на основании полученного ранее выражения (7)

$$y_{пр}(t) = X_m\cdot K(0,\omega_1)\cdot\cos(\omega_1 t + \arg K(0, j\cdot\omega_1)) - X_m K(-\beta,0)\cdot e^{-\beta\cdot t} =$$

$$X_m\frac{k_1\cdot\omega_1^2}{\sqrt{(w_1^2-\omega_1^2)^2 + 4\alpha_1^2 w_1^2}\cdot\sqrt{\omega_1^2+\alpha_2^2}}\cdot\cos(\omega_1 t + \pi - arctg\frac{2\alpha_1\omega_1}{w_1^2-\omega_1^2} - arctg\frac{\omega_1}{\alpha_2}) -$$

$$-X_m\frac{k_1\cdot\beta^2}{(\beta^2 - 2\alpha_1\beta + w_1^2)(\alpha_2-\beta)}e^{-\beta\cdot t}.$$

Свободную составляющую определим согласно выражения (10)

$$y_{св}(t) = k_2\cdot X(-\alpha_1, w_1)\cdot e^{-\alpha_1\cdot t}\cdot\sin(w_1\cdot t + \phi_1 + \arg X(-\alpha_1, jw_1)) + k_1\cdot X(-\alpha_2, 0)\cdot e^{-\alpha_1\cdot t} =$$

$$k_2\cdot X_m\frac{\sqrt{(\alpha_1\beta+\omega_1^2)^2 + \beta^2 w_1^2}}{\sqrt{(w_1^2-\omega_1^2+\alpha_1^2)^2 + 4\alpha_1^2 w_1^2}\cdot\sqrt{(\beta-\alpha_1)^2 + w_1^2}}e^{-\alpha_1\cdot t}\sin(w_1 t + \phi_1 + \pi - arctg\frac{\beta\cdot w_1}{\alpha_1\beta+\omega_1^2} +$$

$$+arctg\frac{2\alpha_1 w_1}{w_1^2-\omega_1^2+\alpha_1^2} - arctg\frac{w_1}{\beta-\alpha_1}) - k_1\cdot X_m\frac{\beta\cdot\alpha_2 + \omega_1^2}{(\alpha_2^2+\omega_1^2)(\beta-\alpha_2)}e^{-\beta\cdot t}.$$

Как следует из рассмотренного примера, метод анализа нестационарных режимов работы линейных систем на основе спектральных представлений преобразования Лапласа для сигналов и линейных систем требует значительно меньших вычислительных затрат, чем другие используемые в настоящее время методы, в том числе теорема разложения. Значительный выигрыш может быть получен и при реализации указанного метода с помощью вычислительной техники.

Дополнительно хотелось бы отметить следующее. Для линейных систем автоматического управления, как правило, заранее известны передаточная функция, корни знаменателя передаточной функции, импульсная функция. Поэтому для использования предлагаемого метода анализа нестационарных режимов линейных систем необходимо определить лишь изображение входного сигнала.

Другим важным преимуществом предлагаемого метода является его тесная связь со спектральными представлениями сигналов и систем. Это дает возможность использовать рассматриваемые спектральные представления и для решения задач синтеза линейных систем.

Рассматриваемый подход к анализу и синтезу линейных систем на основе спектральных представлений преобразования Лапласа эффективен и в следующих случаях [6,7]:

- решение задач по декомпозиции и восстановлению непрерывных сигналов;
- для систем, критичных по быстродействию, целесообразно для учета конечности времени наблюдения за сигналом использовать частотно-временной подход на основе кратковременного (оконного) преобразования Лапласа (по аналогии с аналогичными спектральными представлениями на базе преобразования Фурье);
- для решения задач по анализу и синтезу систем с конечной импульсной характеристикой (КИХ-фильтров) при использовании частотно-временного представления сигналов и систем на основе преобразования Лапласа;
- для решения задач анализа и синтеза цифровых линейных систем.

Литература

1. Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы. – М.: Высш.шк., 2000.
2. Харкевич А.А. Спектры и анализ. - М.: Гос.изд.физ.-мат.л-ры, 1962.
3. Смит С.В. Научно-техническое руководство по цифровой обработке сигналов. – СПб.: АВТЭКС, 2001.
4. Математические основы теории автоматического регулирования/ Под. ред. Б.К.Чемоданова. – М.: Высшая школа, 1977.
5. Левин Б.Р., Шварц В. Вероятностные модели и методы в системах связи и управления. – М.: Радио и связь, 1985.
6. Ванин В.К., Мокеев А.В. Современные методы обработки сигналов в технике релейной защиты. – Л.: Труды ЛПИ, вып.421, 1987.
7. Мокеев А.В. Основы автоматического управления систем электроснабжения: учебное пособие. Часть I. - Архангельск: Изд-во Арханг. гос. техн. ун-та, 2005.

SIGNAL AND SYSTEM SPECTRAL EXPANSION APPLICATION BASED ON LAPLACE TRANSFORM TO ANALYSE LINEAR SYSTEMS

Mokeev A.

The Arkhangelsk State Technical University

Applying spectral expansion based on Laplace transform is suggested to analyse stationary and non-stationary linear systems modes.

Laplace transform, contrary to commonly used Fourier transform, allows to present the signal as a set of damped oscillatory components.

The signal presentation given above is preferable for most analog linear systems. In this case, to determine the forced component of the output signal from the three-dimensional spectrum of the input signal it will suffice to use information about the final values on the complex frequencies corresponding to the parameters of the damped oscillatory components.

For the input signal in the form of a damped oscillatory component, by analogy with Fourier transform, analytical dependence to determine the output signal conservative value on applying Laplace transform spectral expansion was received.

Physical meaning of the frequency responses received via Laplace transform can be defined in the following way. Should the input signal be transmitted to the linear system input with known transfer function in the form of damped oscillatory component, forced component reaction of system will be also in the form of damped oscillatory component, where its level concerning an input signal will change to the value amplitude-frequency function on the complex frequency determined by the input signal parameters, and the initial phase will change to the value phase-frequency functions in the similar conditions.

Thus, the physical meaning of the amplitude-frequency and phase-frequency responses given above is analogous to that of the classical similar frequency responses; however, one may apply a wider range of signals and their

components, such as constant component, exponential component, sinusoidal component and damped oscillatory component.

To determine free components of the system output signal, it is worth applying uniformity of mathematical description for signals and systems both in time domain and in frequency domain.

It is worth mentioning that like the input signal, one can describe the impulse function as set of damped oscillatory components for the absolute majority of physically feasible linear systems.

The free component of the linear system output signal, determined by the impulse function in the form of a damped oscillatory component, will be similar to the latter. However, contrary to the impulse function, the level free component of the system output signal will change to the value of the input signal representation module on the complex frequency determined by the parameters of the damped oscillatory component of the impulse function, and the initial phase will change to the value of argument for the input signal representation on the same conditions.

The method suggested for analyzing stationary and non-stationary modes of linear systems based on spectral expansion of Laplace transform requires fewer calculations than other methods as well as expansion theorem. A considerable advantage can be gained while implying the method using computer facilities.

The approach described to analyse of linear systems based of spectral expansion of Laplace transform is also efficient in case it is necessary to consider signal observation time finitude (applying Laplace short-time transform analogous to Fourier transform), for systems with finite-impulse response (FIR filters) and for digital linear systems.