

## РЕКУРРЕНТНЫЙ МЕТОД ОЦЕНИВАНИЯ ЧАСТОТЫ СИНУСОИДАЛЬНОГО СИГНАЛА

Подчиненко Н.Е., Скрипкин А.А., Щербачёв В.А.

ФГУП «ГКБ «Связь» email: [alexyscrypkin@rostov.ru](mailto:alexyscrypkin@rostov.ru)

### ВВЕДЕНИЕ

Решение широкого круга задач в системах связи, радионавигации, радиоастрономии сталкивается с необходимостью оценивания частоты принимаемых сигналов, которая сводится к классической постановке [1,2] оценивания частоты синусоиды, искажённой белым шумом (БШ). При практической реализации известных оптимальных (или близких к оптимальным) алгоритмов [1,2,3] в ряде случаев первоочередное значение приобретает вычислительная эффективность.

Например, в работе [1] приведён алгоритм оценки частоты комплексной синусоиды в белом шуме, реализующий оптимальное (в среднеквадратическом смысле) взвешивание разностно-фазовой статистики, при этом показано, что при «хороших» отношениях сигнал/шум (ОСШ) полученная оценка близка к оптимальной. Метод вычисления оценки частоты, предложенный в работе [1], можно характеризовать как метод оценки по полной выборке, где для вычисления точечной оценки частоты формируется вектор из  $N$  исходных разностно-фазовых измерений, который умножается на оптимизированную весовую функцию, зависящую от размера  $N$  вектора измерений.

Часто на практике, особенно в случаях мобильных встраиваемых измерителей, оказывается не эффективным накапливать и хранить большой объём наблюдений до получения первого результата оценивания, когда возможно построить рекуррентный алгоритм оценивания (РАО), требующий сохранения лишь небольшое число параметров состояния, количество которых не зависит от времени наблюдения и, соответственно, объёма обрабатываемых исходных данных. Кроме того, РАО с первых шагов наблюдения доставляет текущие оценки частоты, в соответствии с которыми может быть подстроен приёмный тракт, что потенциально позволяет улучшить ОСШ и, следовательно, улучшить качество оценивания по сравнению с обработкой по полной выборке, использующей тот же объём наблюдений.

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В данной работе ставится задача синтеза алгоритма оценивания частоты комплексной синусоиды (1), искажённой комплексным дискретным БШ  $z_k$ ,

$$x_k = A \cdot e^{j(\omega_0 k + \theta)} + z_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

В качестве исходных данных принимаются разностно-фазовые измерения, полученные для сигнала (1) и имеющие вид (2)

$$\psi_k = \angle x_k - \angle x_{k-1} \approx \omega_0 + \text{Im}(z_k) - \text{Im}(z_{k-1}), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (2)$$

где последнее приближительное равенство практически выполняется при умеренно высоких ОСШ [1]. Требуемый алгоритм оценивания отличается двумя основными свойствами:

1) на каждом шаге  $K$  наблюдения результатом является оценка частоты  $\hat{\omega}_K(\psi_1, \dots, \psi_K)$  совпадающая, с оценкой, предложенной в работе [1], для выборки объёма  $K$ ;

2) алгоритм не требует памяти для хранения данных (1,2), за исключением нескольких регистров состояния, число которых не зависит от времени наблюдения  $K$ .

При такой постановке задачи полученный РАО, во-первых, наследует от оценки [1] все точностные характеристики и оптимальные свойства, а, во-вторых, превосходит вариант [1] эффективностью реализации (по памяти).

### ОСНОВНЫЕ РЕКУРРЕНТНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Линейная оценка частоты, определённая в [1], может быть тождественно записана в виде отличном от [1], но удобном для дальнейших преобразований

$$\hat{\omega}_K(\psi_1, \dots, \psi_K) = \sum_{k=1}^K w_k \cdot \psi_k, \quad w_k = \frac{[(K+1)k - k^2]}{n_K}, \quad (3)$$

где  $n_K = \frac{1}{6} K(K+1)(K+2)$  - нормирующий множитель, зависящий от размера выборки;  $w_k$  - параболическая весовая функции, компенсирующая (в отличие от прямоугольной [3]) наличие корреляции между последовательными измерениями (2), что и обуславливает её оптимальность в смысле взвешенной линейной оценки методом наименьших квадратов.

Из определения (3) опять-таки тождественно имеем

$$\hat{\omega}_K(\psi_1, \dots, \psi_K) = \frac{1}{n_K} \left( (1+K) \sum_{k=1}^K k \cdot \psi_i - \sum_{k=1}^K k^2 \cdot \psi_i \right) = a_1(K) - a_2(K), \quad (4)$$

где введены две накопительные переменные

$$a_1(K) = \frac{6}{K(K+2)} \sum_{k=1}^K k \cdot \psi_k = \frac{K^2-1}{K^2+2K} \cdot a_1(K-1) + \frac{6}{K+2} \cdot \psi_K, \quad (5)$$

$$a_2(K) = \frac{1}{n_K} \sum_{k=1}^K k^2 \cdot \psi_k = \frac{K-1}{K+2} \cdot a_2(K-1) + \frac{6K}{(K+1)(K+2)} \cdot \psi_K \quad K=1,2,\dots$$

Переменные состояния  $a_1(K), a_2(K)$ , описываемые рекуррентными соотношениями (5), содержат всю необходимую для оценки (4) информацию, полученную по  $K$  разностно-фазовым измерениям. Заметим, что для вычислений (5) и необходимо хранение счётчика  $K$ , а начальные условия  $a_1(0), a_2(0)$  могут быть произвольными.

Строго говоря, для практической реализации необходим ещё один параметр состояния  $a_0 = \angle x_{K-1}$ , содержащий предыдущее измерение фазы, тогда получая на каждом  $K$ -ом шаге измерение текущей фазы  $\angle x_K$  входного сигнала, можно реализовывать оценку (3) в виде алгоритма, приведенного в Таблице 1.

Таблица 1.

Параметры состояния: $\{K, a_0, a_1, a_2\}$ ,	Инициализация: $K := 0; a_0 = \angle x_0$
Шаг обработки текущего измерения $\angle x_K$	
$K := K + 1; \psi_K := \angle x_K - a_0;$	
$a_0 := \angle x_K; a_1 := \frac{K^2-1}{K^2+2K} a_1 + \frac{6}{K+2} \psi_K; a_2 := \frac{K-1}{K+2} a_2 + \frac{6K}{(K+1)(K+2)} \psi_K$	
Текущий результат оценивания $\hat{\omega}_K := a_1 - a_2$	

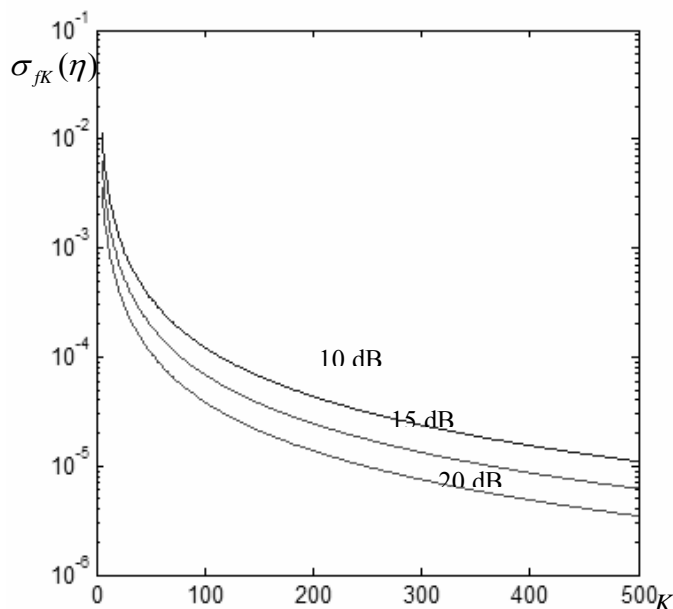
### ХАРАКТЕРИСТИКИ ТОЧНОСТИ

Так как оценка (4) совпадает на каждом шаге  $K$  с оценкой (3) для соответствующего объёма, то и полученное в работе [1] выражение для дисперсии оценки (3) остаётся справедливым для оценки (4) и имеет вид.

$$\sigma_{JK}^2(\eta) = \text{var} \left( \frac{\hat{\omega}_K}{2\pi} \right) = \frac{6}{\eta K (K^2 - 1) (2\pi)^2}, \quad (6)$$

где  $\eta$  - ОСШ. Применительно к рассматриваемой постановке задачи наибольший практический интерес представляют зависимости изменения точности оценки (4) от времени наблюдения, которые приведены на рис.1.

На рис.1 изображены зависимости СКО нормированной оценки частоты от объёма обработанных данных для трёх вариантов возможных ОСШ  $\eta = 10 \text{ dB}, 15 \text{ dB}, 20 \text{ dB}$ . Для интерпретации в Гц результатов, приведённых на рис.1 в логарифмическом масштабе, следует умножить приведенные данные



$\sigma_{JK}$  на частоту дискретизации, выраженную в Гц.

Рис.1.

Для проверки работоспособности предложенного метода проводилось его статистическое моделирование, и его результаты практически совпадают с приведенными на рис.1. теоретическими характеристиками.

В частотомерах выпускаемых промышленностью для оценки частоты при взвешивании используется прямоугольное окно, при этом точность оценивания на тех же размерах выборки в несколько раз меньше, чем у рассмотренного метода [1] с параболическим взвешиванием (3).

#### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для известного метода оценивания частоты комплексной синусоиды в белом шуме предложен рекуррентный алгоритм вычисления оценки, сохраняющий оптимальные свойства исходного, но не требующий накопления и хранения совокупности отсчетов разностно-фазовых измерений.

Предложенный алгоритм позволяет получать оценку частоты в темпе поступления отсчетов разности фаз и исключить средства хранения данных из состава измерителя.

На основе предложенного алгоритма разработаны способ и устройство оценивания частоты синусоидальных сигналов [4], которые могут быть легко реализованы в промышленном масштабе. В частности, при внедрении данного способа в стандартные частотомеры точность измерения ими частоты может быть повышена в несколько раз.

#### Литература

1. Steven M. Kay, "A Fast and Accurate Single Frequency Estimator" /*IEEE Trans on Acoustics Speech and Signal Processing*, vol 37. No. 12 December 1989, pp. 1987-1990
2. D. C. Rife and R. R. Boorstin, "Single tone parameter estimation from discrete-time observations" /*IEEE Trans on Information theory*, vol. IT-20, Sept. 1974, pp. 591-598
3. S. A Tretter, "Estimating the frequency of a noisy sinusoid by linear regression" /*IEEE Trans on Information theory*, vol. IT-31, Nov 1985 pp. 832-835
4. Патент РФ, № 2183839, Подчиненко Н.Е., Скрипкин А.А., Щербачёв В. А., Способ измерения частоты синусоидальных сигналов и устройство для его реализации, М., ФИПС, 2002, МПК G 01 R 23/12

---

### SINUSOID SIGNAL RECURRENT FREQUENCY ESTIMATION

Podchinenko N., Scrypkin A., Scherbachev V.

FGUP «GKB «Sviaz» email: [alexyscrypkin@rostov.ru](mailto:alexyscrypkin@rostov.ru)

Some communication, radionavigation and radioastronomy problems are related with received signal frequency estimation. Often the problems are reduced to frequency estimation [1,2] of sinusoid signal damaged by additive white Gaussian noise (AWGN). Top-priority significance has computational efficiency with practical implementation of some known optimal or near optimal frequency estimation algorithms [1,2,3].

For example [1], it has been created cisoid (damaged by additive white Gaussian noise) frequency estimation algorithm. The frequency estimation algorithm has been realized by least square optimal weighing of phase-difference statistic. It has been shown that discovered estimate is near optimal with moderate SNRs.

Kay's suggested frequency estimation method [1] may be characterized as batch sample frequency estimation method. Point frequency estimate is obtained as scalar product of N-dimensional phase-difference statistic vector with optimal weighing function, that depends from vector dimension.

It's not efficient to accumulate and keep some volume of signal's samples before obtaining first initial point frequency estimate, especially, for embedded estimator. There is necessity to create recurrent frequency estimation algorithm or method for such case, when point frequency estimate may be obtained with small time independent (or accordingly from data volume) state parameters.

The paper is devoted to recurrent frequency estimation algorithm creation for known, Kay's suggested cisoid frequency estimation method (with keeping optimality but without phase-difference data accumulation and holding).

Cisoid frequency estimate may be received and improved (with created recurrent cisoid frequency estimation method) on real time as new phase-difference data sample becomes available. Accumulation and holding means may be excluded from the estimator.

The recurrent cisoid frequency estimation method has been tested by statistical simulation. The simulation test results have been in close agreement with theoretical curve.

Most industrial cymometers are used rectangular window weighing function for frequency estimation. Frequency estimation accuracy of such cymometers is several times less than suggested frequency estimation method accuracy with paraboloidal weighing [1].

Ssinusoid signal frequency estimation method and means based on suggested recurrent algorithm have been created and patented [4]. The method and means may be easily realized by some industry manufacturers. In particular, some industrial cymometer frequency estimation accuracy may be more than one time improved with the patented method implantation.

Литература

1. Steven M. Kay, "A Fast and Accurate Single Frequency Estimator" /*IEEE Trans on Acoustics Speech and Signal Processing*, vol 37. No. 12 December 1989, pp. 1987-1990
2. D. C. Rife and R. R. Boorstin, "Single tone parameter estimation from discrete-time observations" /*IEEE Trans on Information theory*, vol. IT-20, Sept. 1974, pp. 591-598
3. S. A Tretter, "Estimating the frequency of a noisy sinusoid by linear regression" /*IEEE Trans on Information theory*, vol. IT-31, Nov 1985 pp. 832-835
4. Патент РФ, № 2183839, Подчиненко Н.Е., Скрипкин А.А., Щербачёв В. А., Способ измерения частоты синусоидальных сигналов и устройство для его реализации, М., ФИПС, 2002, МПК G 01 R 23/12

