СИНТЕЗ ДВУМЕРНЫХ НЕРАЗДЕЛИМЫХ ВЕЙВЛЕТ-ФИЛЬТРОВ С ПЕРЕСТРАИВАЕМЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Кобелев В.Ю., Моисеев А.А., Волохов В.А., Смоляков А.В.

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова
150000, Россия, Ярославль, ул. Советская, 14, каб. 309. Тел. (4852) 79-77-75. dcslab@uniyar.ac.ru

Решению задачи представления и синтеза неразделимых вейвлет-фильтров в настоящее время посвящен сравнительно небольшой объем публикаций по причине высокой вычислительной сложности и малой распространенности использования неразделимых фильтров в приложениях. Основная масса алгоритмов на базе вейвлет-преобразований, и реально используемые кодеки используют разделимые вейвлет-фильтры. Обобщение одномерного вейвлет-преобразования на двумерный случай было выполнено еще в 1990-х годах и представлено в работах Добеши [1, 2]. При использовании двумерных неразделимых вейвлет-преобразований прослеживаются два основных направления – общий случай, когда ортонормированный базис вейвлетов представлен тремя пространствами, и разложение изображения в частотной плоскости происходит на 4 области; частный случай, соответствующий двумерной лифтинг-схеме, и схема разложения имеет шахматную структуру (в этом случае вейвлет-базис представлен одним, двумя или тремя пространствами). В настоящей работе параметризация и синтез вейвлет-фильтров касается общего варианта представления двумерных вейвлет-фильтров.

Для удобства дальнейшего представления материалов рассмотрим некоторые определения и свойства двумерного вейвлет-преобразования. Пусть $\varphi(x,y)$ – есть двумерная масштабирующая функция, подчиняющаяся уравнениям масштабирования

$$\varphi(x,y)=\sum_{k=0}^{M-1}\sum_{j=0}^{M-1}c_{kj}\varphi(2x-k,2y-j).$$

В силу ортогональности $\varphi(x,y)$ для ее Фурье-образа выполняется равенство

$$\left|H(j\omega_1,j\omega_2)\right|^2+\left|H(j\omega_1+\pi,j\omega_2)\right|^2+\left|H(j\omega_1,j\omega_2+\pi)\right|^2+\left|H(j\omega_1+\pi,j\omega_2+\pi)\right|^2=1, \quad (1)$$

где $H(j\omega_1,j\omega_2)=\dfrac{1}{M_1M_2}\sum_{n_1=0}^{M_1-1}\sum_{n_2=0}^{M_2-1}c_{n_1,n_2}e^{-j(\omega_1n_1+\omega_2n_2)}$.

По аналогии с одномерным случаем, фильтр, обладающий свойством (1), будем называть квадратурно-зеркальным двумерным фильтром.

Полный вейвлет-базис представлен тремя пространствами ψ_1, ψ_2, ψ_3

$$\psi_1(x,y)=\sum_{k=0}^{M-1}\sum_{j=0}^{M-1}g_{1kj}\psi_1(2x-k,2y-j),\ \psi_2(x,y)=\sum_{k=0}^{M-1}\sum_{j=0}^{M-1}g_{2kj}\psi_2(2x-k,2y-j),$$

$$\psi_3(x,y)=\sum_{k=0}^{M-1}\sum_{j=0}^{M-1}g_{3kj}\psi_2(2x-k,2y-j).$$

Коэффициенты c_{kj} и g_{kj} связаны между собой следующими соотношениями

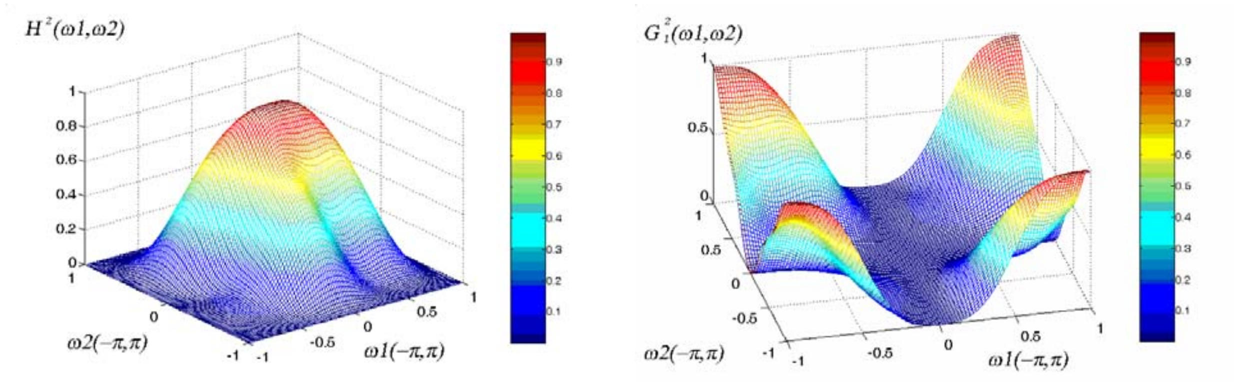
$$g_{1kj}=(-1)^{k+j}c_{M-k+1,M-j+1},\ g_{2kj}=(-1)^jc_{k,M-j+1},\ g_{3kj}=(-1)^kc_{M-k+1,j}.$$

Под низкочастотным двумерным вейвлет-фильтром понимается цифровой фильтр, импульсной характеристикой которого являются коэффициенты масштабирующего уравнения c_{kj}

$$H(j\omega_1,j\omega_2)=\frac{1}{M_1M_2}\sum_{k=0}^{M_1-1}\sum_{j=0}^{M_1-1}c_{kj}e^{-j(k\omega_1+j\omega_2)}.$$

Под высокочастотным двумерным вейвлет-фильтром понимается цифровой фильтр, импульсной характеристикой которого являются коэффициенты масштабирующего уравнения g_{1kj}, g_{2kj}, g_{3kj}.

На рис. 1 представлены квадраты амплитудно-частотных характеристик низкочастотного вейвлет-фильтра $H^2(\omega_1,\omega_2)$ и соответствующего высокочастотного вейвлет-фильтра $G_1^2(\omega_1,\omega_2)$. Пример разделения частотной плоскости представлен на базе неразделимого вейвлет-фильтра, синтезированного согласно приводимой ниже методике.



а) б)

Рис. 1. Разделение частотной плоскости на области при использовании различных фильтров:
а) НЧ; б) ВЧ

По аналогии с синтезом одномерных вейвлет-фильтров основными условиями, ограничивающими выбор вейвлет-функций, остаются условие ортогональности сдвигов и условие наличия как минимум одного нулевого момента. Условие ортогональности сдвигов вейвлет-функции обеспечивает полную обратимость вейвлет-разложения. Наличие хотя бы одного нулевого момента обусловлено тем, чтобы вейвлет-функция и соответствующая масштабирующая функция были достаточно регулярными. Здесь синтезируемые вейвлет-функции имеют минимум один нулевой момент. Однако представленная методика расчета позволяет выполнить обобщение на случай большего числа нулевых моментов.

Ограничения на порядок гладкости m применительно к частотным свойствам вейвлет-фильтра определяется выражениями [3]

$$\left.\frac{\partial^k H(\omega_1,\omega_2)}{\partial^k \omega_1}\right|_{\omega_1=\frac{\pi}{2}}=0,\ \left.\frac{\partial^k H(\omega_1,\omega_2)}{\partial^k \omega_2}\right|_{\omega_2=\frac{\pi}{2}}=0, \qquad (2)$$

$$k=1,\ldots,m-1.$$

Квадрат амплитудно-частотной характеристики представим в виде разложения по косинусным функциям

$$H^2(\omega_1,\omega_2)=\sum_{n_1=0}^{N_1-1}\sum_{n_2=0}^{N_2-1} b_{n_1,n_2}\cos(\omega_1 n_1+\omega_2 n_2) \qquad (3)$$

Необходимо отметить, что разложением (3) представляем общий случай представления фильтров – случай двумерного неразделимого фильтра. В частном случае синтеза разделимого фильтра, разложение (3) упрощается.

Для получения необходимой гладкости вейвлет-функции добавим в косинусное разложение (3) дополнительные множители, обладающие свойствами (2)

$$H^2(\omega_1,\omega_2)=(1+\cos(\omega_1))(1+\cos(\omega_2))\sum_{n_1=0}^{N_1-1}\sum_{n_2=0}^{N_2-1} d_{n_1,n_2}\cos(\omega_1 n_1+\omega_2 n_2)\cdot \qquad (4)$$

Разложение (4) является основой решения определенной задачи параметризации, а коэффициенты d_{n_1,n_2} – параметрами параметризации. С целью определения дополнительных уравнений на d_{n_1,n_2} выполним подстановку разложения (4) в выражение (1). Опустив весь необходимый объем математических вычислений, запишем конечное выражение после указанной подстановки

$$\underbrace{\sum_{n1=0}^{N1-1}\sum_{n2=0}^{N2-1} d_{n1,n2}\cos(\omega_1 n_1+\omega_2 n_2)}_{\text{ïðè } n_1-\text{÷åò},\ n_2-\text{íå÷åò}}+\underbrace{\sum_{n1=0}^{N1-1}\sum_{n2=0}^{N2-1} d_{n1,n2}\cos(\omega_1 n_1+\omega_2 n_2)\cos(\omega_1)\cos(\omega_2)}_{\text{ïðè } n_1-\text{íå÷åò},\ n_2-\text{íå÷åò}}+$$

$$+\underbrace{\sum_{n1=0}^{N1-1}\sum_{n2=0}^{N2-1} d_{n1,n2}\cos(\omega_1 n_1+\omega_2 n_2)\cos(\omega_2)}_{\text{ïðè } n_1-\text{÷åò},\ n_2-\text{íå÷åò}}+\underbrace{\sum_{n1=0}^{N1-1}\sum_{n2=0}^{N2-1} d_{n1,n2}\cos(\omega_1 n_1+\omega_2 n_2)\cos(\omega_1)}_{\text{ïðè } n_1-\text{íå÷åò},\ n_2-\text{÷åò}}=\frac{1}{2}$$

Таблица 1

Порядок вейвлета	Общее число переменных (коэффициентов)	Число параметров d_{jk}	Число ограничивающих уравнений на d_{jk}	Число свободных параметров
4*4	16	9	4	5
6*6	36	25	9	16
8*8	64	49	16	33
10*10	100	81	25	56
12*12	144	121	36	85

Таблица 2

Порядок вейвлета $\varphi(x,y)=\varphi_1(x)\varphi_2(y)$	Порядок $\varphi_1(x)$	Порядок $\varphi_2(y)$	Число свободных параметров $\varphi_1(x)$	Число свободных параметров $\varphi_2(y)$	Число свободных параметров общее
4*4	4	4	1	1	2
6*6	6	6	2	2	4
8*8	8	8	3	3	6
10*10	10	10	4	4	8
12*12	12	12	5	5	10

Пусть порядок вейвлета есть $M*M$, тогда число уравнений, ограничивающих выбор d_{jk}, определяется выражением $M \times M/4$. Число свободных параметров определяется выражением $((M-1)\times(M-1)-M\times M/4)$. Результаты расчета числа свободных параметров представлены в табл. 1. Гибкость представления и множественность реализаций неразделимых фильтров особо заметна на фоне представления разделимых фильтров табл. 2.

Необходимым условием, ограничивающим выбор параметров d_{jk}, является положительность тригонометрического ряда

$$H^2(\omega_1,\omega_2)>0 \Rightarrow \sum_k \sum_n d_{kn}\cos(k\omega_1+n\omega_2)\geq 0\,. \tag{5}$$

Решение неравенства (5) в явном виде, где результатом будет n-мерная область существования параметров, является очень сложной задачей. Даже в одномерном случае разработаны лишь частные решения подобного неравенства. Эмпирически получено, что при сужении области допустимых значений d_{jk}

$$d_{00} \geq \sum_{n=1}^{N-1}\sum_{k=1}^{N-1}\left|d_{nk}\right|, \tag{6}$$

неравенство (5) выполняется. Необходимо отметить, что существуют и другие варианты выбора d_{jk}, удовлетворяющие неравенству (5), при которых неравенство (6) не выполняется, однако поиск дополнительных областей определения d_{jk} – довольно нетривиальная задача.

Рассмотрим второй этап синтеза двумерных вейвлет-фильтров – расчет импульсной характеристики (ИХ). Для полноценного расчета импульсной характеристики требуется знать соответствующую фазовую характеристику, т.е. необходимо решение фазовой задачи.

Применительно к расчету одномерных фильтров, расчет нужной фазовой характеристики выполняется, используя метод факторизации, путем вычисления нулей АЧХ фильтра и размещения их на z -плоскости в соответствии с решаемой задачей. Напомним, что метод факторизации основывается на основной теореме алгебры – полином Р порядка М можно представить в форме произведения М сомножителей вида $(z-z_0)(z+z_0{}^*)$ [4]. Именно возможностью факторизации АЧХ одномерного фильтра объясняется тот факт, что одной АЧХ соответствует несколько ИХ.

Применительно к двумерному фильтру основная теорема алгебры не выполняется. Более того, многомерные полиномы, как правило, не разлагаются на множители. Поэтому решения многомерных фазовых задач в частотной плоскости оказываются единственными во всех случаях, кроме специальных, не имеющих практического значения. Это приводит к тому, что автоматически снимается задача коррекции фазы двумерного вейвлет-фильтра. Для решения двумерной фазовой задачи можно воспользоваться стандартным итерационным алгоритмом Файнапа (модификация алгоритма Герхберга).

Таким образом, в работе предлагается метод параметризации двумерных неразделимых вейвлет-фильтров, а также дается описание методики синтеза данных фильтров.

Литература

1. Добеши И. Десять лекций по вейвлетам: Пер. с англ. – М.: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2004.
2. Cohen A., Daubechies I. Nonseparable bidimensional wavelet bases / Rev. Mat. Iberoamericana. 1993. V. 9, № 1, P. 51-137.
3. Воробьев В.И., Грибунин В.Г. Теория и практика вейвлет-преобразования. – СПб.: ВУС, 1999.
4. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра. – М.: Физматлит, 2005.

DESIGN OF NON-SEPARABLE 2D WAVELET FILTERS WITH TUNABLE PARAMETERS

Yaroslavl State University
14 Sovetskaya st., Yaroslavl, Russia 150000. Phone: +7(4852)79-77-75. dcslab@uniyar.ac.ru

In our days not much publications are devoted to solving problems of presentation and synthesis of wavelet-filters, because of a high calculation compound and of small spread of using non separable filters in supplements. The main part of algorithms on the base of wavelet-transform and the real using coders are using separable wavelet-filters. Generalization of one plane wavelet transform on a case of two-dimensions had been made in 1990 years and presented in the work of I. Doubechies [1]. While using two-dimensional non separable wavelet-transform overlooked two directions – general case, when the orthonormal bases of wavelet are presented by three spaces and transform of image in frequency plane is coming in four regions; special case, corresponding two-dimensional lifting scheme, and a scheme of transform have a chess structure (in this case wavelet bases is presented by one, two, or three dimensions).In this work parameterization and design of wavelet-filters is concern of the common version of the presentation of two-dimensional wavelet-filters.

How in the case of design of one-dimensional wavelet-filters the main conditions, that limited the choice of wavelet-filters, are staying conditions of orthogonal of translations and the condition of presence as minimum as one vanishing moment. Condition of orthogonal of translations of wavelet-filters providing the full reverse of wavelet-transform. The second condition is stipulate of condition of enough regularity of wavelet- and scaling-functions. Here, in this work, wavelet function have minimum one vanishing moment. However, presented method of calculation allows making generalization on the case of more numbers of vanishing moments.

Square of frequency response characteristic is presented as transform by cosine functions

$$H^2(\omega_1,\omega_2)=\sum_{n_1=0}^{N_1-1}\sum_{n_2=0}^{N_2-1} b_{n_1,n_2}\cos(\omega_1 n_1+\omega_2 n_2).$$

For the full calculation of impulse response is need to know corresponding phase response, so solving of the phase problem is necessary.

According to calculation of one-dimensional filters the calculation of necessary phase response is made using the method of factorization by calculation of zeros of frequency response of the filter and by placing them on z-plane according to solving problem. Remind that the method of factorization is based on the main theorem of algebra – polynomial P of M order may be presented in the form multiplications of multiplier $(z-z_0)(z+z_0^*)$.

Just by the possibility of factorization of frequency response of one-dimensional filter explains the fact that to one frequency response according several impulse responses.

In the case of two-dimensional filter, the theorem of algebra doesn't work. Moreover, multidimensional polynomials don't decompose on multiplier, as a rule. So solutions of multidimensional phase problems on a frequency plane turn out to be unique in all cases, except special, that doesn't have practical mean. This lead to take off of the problem of correction of phase for two-dimensional wavelet-filter. For solving of two-dimensional phase problem the standard iteration algorithm Phynapa (modification of algorithm of Gerkhbera) can be used.

Thus, in this work offer the method of parameterization of two-dimensional non separable wavelet-filter and the method of designing of such filters is given.

References

1. I. Daubechies, Ten lectures on wavelets, SIAM, Philadelphia, 1992.