ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ ОРТОГОНАЛЬНЫХ И БИОРТОГОНАЛЬНЫХ ВЕЙВЛЕТ-ФИЛЬТРОВ

Моисеев А.А., Волохов В.А., Корепанов И.В., Новоселов С.А.

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова
150000, Россия, Ярославль, ул. Советская, 14. Тел. (4852) 79-77-75. dcslab@uniyar.ac.ru

На сегодняшний день обработка сигналов с использованием вейвлет-преобразования получила широкое распространение [1, 2]. Существует множество классов вейвлетов, обладающих различными свойствами (гладкость, симметричность и т.п.), такие как: Добеши, Мейера, Симлета, Коифлета и другие [3]. Выбор того или иного класса вейвлет-функций определяется решаемой задачей. Параметризация вейвлетов может быть полезна при выборе оптимальных вейвлетов в различных задачах [4, 5, 6]. Наиболее известные методы параметризации Полена [7] и Зу [8] обладают несколькими недостатками, в частности: нет возможности задавать порядок гладкости вейвлета, синтез вейвлет-фильтра с требуемой амплитудно-частотной характеристикой требует значительных вычислительных затрат. В работе предлагается метод расчета коэффициентов вейвлетов с заданным порядком гладкости, позволяющий получить ортогональные и биортогональные вейвлеты.

Рассмотрим метод параметризации вейвлет-фильтров. Пусть $\psi(t)$ – некоторая вейвлет-функция, связанная с масштабирующей функцией $\varphi(t)$ уравнением (1). В свою очередь $\varphi(t)$ определяется уравнением (2)

$$\psi(t) = \sum_k g_k \varphi(2t-k), \tag{1}$$

$$\varphi(t) = \sum_k h_k \varphi(2t-k), \tag{2}$$

где h_k и g_k – импульсные характеристики соответствующих вейвлет-фильтров. В случае биортогональных вейвлет-базисов рассматривается два набора базисных функций $\varphi(t)$, $\psi(t)$ и $\tilde{\varphi}(t)$, $\tilde{\psi}(t)$. При этом уравнения, аналогичные (1, 2), справедливы и для $\tilde{\varphi}(t)$, $\tilde{\psi}(t)$.

Условие ортонормальности базисных функций $\varphi(t)$ записывается в следующем виде

$$H^2(\omega) + H^2(\omega+\pi) = 1, \tag{3}$$

где $H(\omega) = \sum_k h_k \mathrm{e}^{-jk\omega}$, а h_k – коэффициенты уравнения (2). Аналогичное условие в случае биортогональных вейвлет-фильтров имеет вид

$$H(\omega)\tilde{H}(\omega) + H(\omega+\pi)\tilde{H}(\omega+\pi) = 1. \tag{4}$$

Для того чтобы базисные функции обладали гладкостью порядка k, необходимо, чтобы частотная характеристика соответствующего фильтра $H(\omega)$ имела k нулей на частоте $\omega = \pi$. Это выполняется в случае, когда $H(j\omega)$ можно представить в виде [3]

$$H(j\omega) = \left(\frac{1+\mathrm{e}^{j\omega}}{2}\right)^k L(j\omega), \tag{5}$$

или для модуля $H(j\omega)$

$$H(\omega) = \left[\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)\right]^k L(\omega). \tag{6}$$

Функцию $L^2(\omega)$ можно представить в виде косинусного ряда, тогда квадрат выражения (6) примет вид

$$H^2(\omega) = \left[\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)\right]^{2k} \sum_{i=0}^{M-1} b_i \cos(i\omega), \tag{7}$$

где M – число параметров, которое должно быть не меньше $k+1$. Аналогично для случая биортогональных вейвлет-фильтров

$$H(\omega)\tilde{H}(\omega) = \left[\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)\right]^{k+\tilde{k}} \sum_{i=0}^{M-1} b_i \cos(i\omega), \tag{8}$$

Для удобства положим, что $k+\tilde{k}=m$ и преобразуем выражение $\sum_{i=0}^{M-1} b_i \cos(i\omega)$ к виду $\sum_{i=0}^{M-1} d_i \cos^i \omega$, что может быть выполнено с помощью линейного преобразования $\mathbf{D}=\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$, где $\mathbf{D}$ – вектор-столбец коэффициентов $d_0, d_1, \ldots, d_{M-1}$, $\mathbf{B}$ – вектор-столбец коэффициентов $b_0, b_1, \ldots, b_{M-1}$, а $\mathbf{A}$ – треугольная матрица преобразования. Для получения ограничений на параметры b_i, необходимо подставить выражение (7) в (3) и (8) в (4).

Выполняя ряд тригонометрических и алгебраических преобразований, получим условие на параметры d_i

$$\sum_{n=0}^{\frac{m+M-1}{2}} \left[\sum_{i=0}^{M-1} d_i \binom{m}{2n-i}\right] \cos^{2n}\omega = 2^{m-1}, \tag{9}$$

где $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$ – число сочетаний из n по k, причем если $k>n$ или $k<0$, то $\binom{n}{k}=0$. Пусть $\left[\sum_{i=0}^{M-1} d_i \binom{m}{2n-i}\right]=c_n$. Тогда условие (9) выполняется, когда $c_0=2^{m-1}$, $c_1=c_2=\ldots=c_{\frac{m+M-1}{2}}=0$. Отсюда получаем систему линейных уравнений $\mathbf{C}\cdot\mathbf{D}=\mathbf{c}$, где $\mathbf{C}$ – матрица коэффициентов $c_{n,i}=\binom{m}{2n-i}$, $\mathbf{D}$ – вектор-столбец коэффициентов $d_0, d_1, \ldots, d_{M-1}$, $\mathbf{c}$ – вектор-столбец коэффициентов $c_0, c_1, \ldots, c_{M-1}$. Обозначая $\frac{m+M-1}{2}=L$, получим

$$\begin{pmatrix} \binom{m}{0} & 0 & 0 & 0 \\ \binom{m}{2} & \binom{m}{1} & \cdots & \binom{m}{2-(M-1)} \\ . & . & . & . \\ \binom{m}{2L} & \binom{m}{2L-1} & \cdots & \binom{m}{2L-(M-1)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d_0 \\ d_1 \\ . \\ . \\ . \\ d_{M-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{m-1} \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

При $M=m+1$, матрица $\mathbf{C}$ – квадратная, размера $(m+1)\times(m+1)$, следовательно, система линейных уравнений (10) имеет единственное решение. Если $M>m+1$, матрица $\mathbf{C}$ имеет размер $(L+1)\times M$, причем $L+1<M$, следовательно, имеется бесконечное множество решений. В этом случае число степеней свободы в определении вейвлета равно $M-L-1$. Варьируя свободными параметрами, можно получить набор различных вейвлет-функций.

Для определения импульсной характеристики фильтра из разложения $H^2(\omega)$ и $H(\omega)\tilde{H}(\omega)$, необходимо воспользоваться методом спектральной факторизации [1], который выполняется следующим образом:

1. Решение уравнения $H^2(\omega)=0$ или $H(\omega)\tilde{H}(\omega)=0$.
2. Переход от корней на частотной оси к нулям на z-плоскости. Дополнение полученных нулей комплексно-сопряженными нулями.
3. Выбор нулей в соответствии с требованиями к частотной характеристике вейвлет-фильтра и типом вейвлет-базиса:
   - для синтеза фильтра с минимальной фазовой характеристикой выбираются нули, модуль которых меньше 1;
   - в случае синтеза фильтров с линейной фазой необходимо разделить полученный набор нулей между фильтрами анализа и синтеза.
4. Получение импульсной характеристики из нулей и полюсов фильтра.

На рис. 1, рис. 2 и рис. 3 представлено распределение нулей вейвлет-фильтров (нули в точке $z=-1$ не показаны).

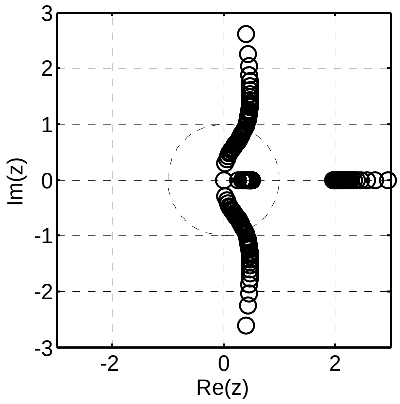

Рис. 1. Распределение нулей семейства вейвлет-фильтров с двумя нулевыми моментами и одной степенью свободы

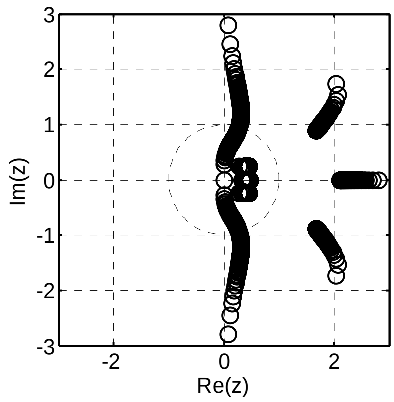

Рис. 2. Распределение нулей семейства вейвлет-фильтров с четырьмя нулевыми моментами и одной степенью свободы

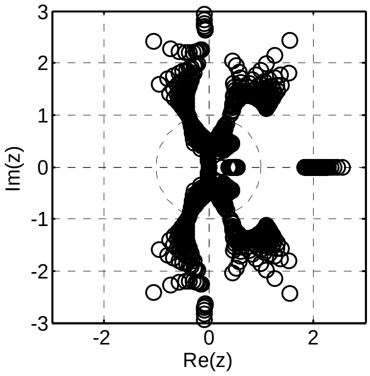

Рис. 3. Распределение нулей семейства вейвлет-фильтров с двумя нулевыми моментами и двумя степенями свободы

Для получения ортогональных вейвлет-фильтров выбираются нули, модуль которых меньше 1. Если $M = m + 1$, получим фильтр Добеши с m нулевыми моментами.

Фильтры, соответствующие биортогональным вейвлет-базисам, получаются в результате разделения набора нулей, соответствующих произведению $H(\omega)\widetilde{H}(\omega)$ между фильтрами анализа и синтеза – $H(\omega)$ и $\widetilde{H}(\omega)$. Данное разделение может производиться различными способами, в результате из одного набора нулей можно получить несколько различных наборов вейвлет-базисов. Также необходимо отметить, что каждый дополнительный параметр b_i увеличивает число нулей произведения амплитудно-частотных характеристик вейвлет-фильтров на четыре. Увеличение числа параметров на два дает одну дополнительную степень свободы.

Предлагаемый метод позволяет синтезировать как ортогональные, так и биортогональные вейвлет-фильтры с требуемой формой амплитудно-частотной характеристики и заданным порядком гладкости соответствующей вейвлет-функции. К тому же предлагаемый метод достаточно прост в реализации и не требует каких-либо символьных вычислений.

Литература

1. Воробьев В.И., Грибунин В.Г. Теория и практика вейвлет-преобразования. – СПб.: ВУС, 1999.
2. Астафьева Н.М. Вейвлет-анализ: основы теории и примеры применения // Успехи физических наук. 1998. Т. 166. № 11. С. 1145–1170.
3. Добеши И. Десять лекций по вейвлетам: Пер. с англ. – М.: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2004.
4. Кобелев В.Ю., Ласточкин А.В. Выбор оптимальных вейвлетов для обработки сигналов и изображений // Докл. 2-ой межд. конф. и выст. «Цифровая обработка сигналов и ее применение» (DSPA’99). М., 1999. С. 514-518.
5. Meerwald P. Digital image watermarking in the wavelet transform domain / Master's thesis, Department of Scientific Computing, University of Salzburg, Austria, Jan 2001.
6. Uhl A., Pommer A. Are parameterized biorthogonal wavelet filters suited (better) for selective encryption? // Multimedia and Security Workshop 2004, Magdeburg, Germany, September 2004. P. 100-106.
7. David Pollen. Parameterization of compactly supported wavelets. Technical report, Aware Inc., USA, 1989.

8. Zou H., Tewfik A.H. Parameterization of compactly supported orthonormal wavelets // IEEE Transactions on Signal Processing. Mar. 1993. V. 41. P. 1423-1431.

PARAMETERIZATION OF ORTHOGONAL AND BIIORTHOGONAL WAVELET FILTERS

Moiseev A., Volohov V., Korepanov I., Novoselov S.

Yaroslavl State University
14 Sovetskaya st., Yaroslavl, Russia 150000. Phone. +7(4852) 79-77-75. dcslab@uniyar.ac.ru

At present time digital wavelet transform has a wide distribution in signal processing application. There are many wavelets families having different properties (smoothness, symmetry etc.), such as: Daubechies, Meyer, Symlets, Coiflets and others [1]. Choice of wavelet function family is determined according to the current task. For example there is an adaptive image compression method constructed on the basis of parameterization method [2]. In this paper the orthogonal and biorthogonal wavelet filters construction method with defined smoothness order is proposed.

Let two sets of scaling functions $\varphi(t)$ и $\tilde{\varphi}(t)$ with smoothness order k и $\tilde{k}$ are form biorthogonal wavelet bases, while $\varphi(t)$ with smoothness order p – orthogonal. Then the following conditions for orthogonal and biorthogonal filter is valid

$$H^2(\omega) + H^2(\omega+\pi) = 1 \tag{1a}$$

$$H(\omega)\tilde{H}(\omega) + H(\omega+\pi)\tilde{H}(\omega+\pi) = 1, \tag{1b}$$

where $H(\omega) = \sum_l h_l e^{-jl\omega}$, $\tilde{H}(\omega) = \sum_l \tilde{h}_l e^{-jl\omega}$, and h_l, $\tilde{h}_l$ – scaling equation coefficients.

$H(\omega)^2$ and $H(\omega)\tilde{H}(\omega)$ given by

$$H^2(\omega) = \left[\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)\right]^{2p} \sum_{i=0}^{M-1} b_i \cos(i\omega) \tag{2a}$$

$$H(\omega)\tilde{H}(\omega) = \left[\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)\right]^{k+\tilde{k}} \sum_{i=0}^{M-1} b_i \cos(i\omega), \tag{2b}$$

where b_i – parameters, which specify $\varphi(t)$ и $\tilde{\varphi}(t)$. By substitution (2) in (1) and performing all necessary calculation, we will get constraint on b_i parameters in the form of linear equations system. In case of $M = 2p+1$, we have series (2) which leads to Daubechies wavelets (at that $2p = k + \tilde{k}$). If $M > 2p+1$, then we have certain number of degree of freedom in wavelet definition. Hence, by varying free parameters different wavelets can be obtained. Then, using spectral factorization method [1] we will find filter coefficients h_l и $\tilde{h}_l$.

The method proposed permit to construct orthogonal and biorthogonal wavelet filters, with desirable magnitude and defined quantity of vanishing moments. Also suggested method has a simple realization and there is no need to do any symbolic calculations.

References

1 I. Daubechies, Ten lectures on wavelets, SIAM, Philadelphia, 1992.

2 Kobelev V., Lastochkin A., Choice of optimal wavelets for signal and image compression // Proc. of 2th Int.Conf. "Digital Signal Processing and its Application " (DSPA'99). V. 2 P. 519.