

ОБЕЛЯЮЩИЕ ТРИ-АДИЧЕСКИЕ ВЕЙВЛЕТ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДЛЯ СЖАТИЯ ЦВЕТНЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Калугина Л.А., Гусев О.А., Остхеймер Е.В., Лабунец В.Г.

Уральский государственный технический университет - УПИ

Хорошо известно, что цветные изображения имеют три RGB-компоненты $f^{col}(x, y) = (f_R(x, y), f_G(x, y), f_B(x, y))$. В данном исследовании мы будем интерпретировать цветные изображения как функции вида $f_{col}(x) = f_R(x, y)1 + f_G(x, y)\varepsilon^1 + f_B(x, y)\varepsilon^2$, принимающие значения в триплетной алгебре $A_3^{col} := R1 + R\varepsilon^1 + R\varepsilon^2$, где R – поле вещественных чисел, и $1, \varepsilon^1, \varepsilon^2$ – три гипермнимые единицы со свойством $\varepsilon^3 = 1$. Числа формы $C = r1 + g\varepsilon + b\varepsilon^2$ были впервые открыты Чарли Гревсом в его попытке обобщить обычные комплексные числа на трехмерное пространство. Гревс называл эти числа *триплетными*. Мы будем называть их *цветными числами* и использовать их для синтеза нового класса вейвлет преобразований с обесцвечивающим цветные изображения свойством.

Как известно, вейвлет преобразование Хаара WHT_{2^n} генерируется матрицей Уолша $F_2 = \begin{bmatrix} 1 & +1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$:

$$WHT_{2^n}[F_2] = \prod_{j=1}^n \left[\begin{matrix} (I_{2^{n-j}} \otimes [1+1]) \\ (I_{2^{n-j}} \otimes [1-1]) \end{matrix} \right] \oplus I_{2^{n-2^{n-j+1}}}$$

Обычно это преобразование используется для обработки серых изображений. Если его использовать для обработки цветных изображений, то оно будет обрабатывать изображение параллельно и независимо по каждому (RGB)-каналу, и поэтому матрица Уолша F_2 должна быть заменена “трехканальной” атомарной

матрицей вида: $F_2 \otimes I_3 = \begin{bmatrix} 1 & +1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \otimes I_3 = \begin{bmatrix} I_3 & +I_3 \\ I_3 & -I_3 \end{bmatrix}$. Следовательно, диадическое вейвлет преобразование

$WHT_{2^n}^{col}$ (при канально-независимой обработке цветных изображений) определяется следующим выражением

$$WHT_2^{col}[F_2 \otimes I_3] = \prod_{j=1}^n \left[\begin{matrix} (I_{2^{n-j}} \otimes [I_3 + I_3]) \\ (I_{2^{n-j}} \otimes [I_3 - I_3]) \end{matrix} \right] \oplus I_{3(2^n - 2^{n-j+1})}$$

Если необходимо вовлекать в процесс обработки сразу три цветных пикселя, то вместо (2x2)- преобразования Уолша, вовлекающего в обработку пару пикселей, необходимо использовать (3x3)-преобразование

вида $F_3(\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}$, где $\hat{a} = (a_{11}, a_{12}, a_{13})$, $\hat{b} = (b_{21}, b_{22}, b_{23})$,

$\hat{c} = (c_{31}, c_{32}, c_{33})$ - три ортогональных вектора, то мы получим следующую атомарную матрицу

$$F_3(\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}) \otimes I_3 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \otimes I_3 = \begin{bmatrix} a_{11}I_3 & a_{12}I_3 & a_{13}I_3 \\ b_{21}I_3 & b_{22}I_3 & b_{23}I_3 \\ c_{31}I_3 & c_{32}I_3 & c_{33}I_3 \end{bmatrix}$$

Атомарная матрица $F_3(\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}) \otimes I_3$, действуя на три соседних цветных пикселя, преобразовывает их параллельно и независимо по каждому каналу. Поэтому выражение для соответствующего триадического вейвлет преобразования примет форму

$$WHT_{3^n}[F_3(\hat{a}, \hat{b}, \hat{c})] = \prod_{j=1}^n \left[\begin{array}{c} I_{3^{n-i}} \otimes [a_{11}I_3 \ a_{12}I_3 \ a_{12}I_3] \\ I_{3^{n-i}} \otimes [b_{11}I_3 \ b_{12}I_3 \ b_{12}I_3] \\ I_{3^{n-i}} \otimes [c_{11}I_3 \ c_{12}I_3 \ c_{12}I_3] \end{array} \right] \oplus I_{3^n - 3^{n-i+1}}.$$

Мы видим, что в обоих случаях (диадический и триадический) информация из разных каналов не перемешивается и поэтому преобразованное изображение (спектр) снова является цветным. Возникает вопрос: существуют ли такие преобразования, которые перемешивают каналы, полностью или частично обесцвечивая цветное преобразование? Оказывается, что решить эту проблему можно используя не вещественные, а триплетные числа, которые порождают следующие триадические триплетные вейвлет преобразования:

$$WHT_{3^n}[F_3(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})] = \prod_{j=1}^n \left[\begin{array}{c} I_{3^{n-i}} \otimes [A_{11} \ A_{12} \ A_{13}] \\ I_{3^{n-i}} \otimes [B_{21} \ B_{22} \ B_{23}] \\ I_{3^{n-i}} \otimes [C_{31} \ C_{32} \ C_{33}] \end{array} \right] \oplus I_{3^n - 3^{n-i+1}},$$

где $F_3(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}$ - произвольное обратимое преобразование с триплетными числами

$A_{11}, A_{12}, A_{13}, B_{21}, B_{22}, B_{23}, C_{31}, C_{32}, C_{33}$.

Проблема. Необходимо синтезировать такой класс триадических триплетных преобразований, который бы производил спектр, в котором максимальное число спектральных отсчетов имеет значения RGB-компонент, разница между которыми не превышает заданную величину Δ . Такие спектры будем называть Δ -серыми. Если $\Delta = 0$, то спектр будет, очевидно, серым, а само преобразование будет обесцвечивающим.

Поскольку при перемножении триплетных чисел, происходит перемешивание их реальных и двух мнимых частей, то это означает, что триплетное вейвлет-преобразование относится к классу преобразований, перемешивающих каналы, а это означает, в свою очередь, что вполне можно найти такие триадические триплетные вейвлет преобразования, которые бы частично или полностью обеляли вейвлет спектр. Для уменьшения вычислительных затрат триплетного вейвлет преобразования в качестве триплетных чисел $A_{11}, A_{12}, A_{13}, B_{21}, B_{22}, B_{23}, C_{31}, C_{32}, C_{33}$ целесообразно использовать числа в виде степеней гипермнимых единиц ε^i или их линейных комбинаций с тривиальными весами. В этом случае мультипликативная сложность вейвлет преобразования может быть значительно понижена. Действительно, произведение триплетных чисел ε^1 и ε^2 с цветным (триплетным) пикселем $f_{col} = (f_R, f_G, f_B) = f_R 1 + f_G \varepsilon^1 + f_B \varepsilon^2$

реализуется без умножений. В работе синтезировано широкое семейство обесцвечивающих вейвлет преобразований. Предварительные эксперименты показали следующие результаты. На Рис. 1 представлены преобразованные после первой (среднее) и пятой итераций (правое) изображения, полученные из исходного изображения (крайнее левое). Анализ преобразованных изображений и их трехмерных гистограмм после первой и пятой итерации, показывает, что преобразованные изображения становятся все более и более серыми, что подтверждает поведение трехмерных и одномерных гистограмм. Если одномерные каналные гистограммы исходного изображения были широкими и имели различную форму (см. первое изображение в среднем ряду), то после первой итерации одномерные гистограммы приобрели примерно одинаковую форму и почти пересекаются, что свидетельствует об отбеливании изображения. После пятой итерации одномерные гистограммы стали еще более узкими и полностью совпали друг с другом, что свидетельствует о дальнейшем отбеливании (обратимом!) преобразованного изображения. Все эти соображения подтверждают и трехмерные гистограммы (нижний ряд картинок). Мы видим, что трехмерная гистограмма исходного изображения формирует обширный кластер, занимающий значительную часть RGB-куба. После первой итерации этот кластер принял веретенообразную форму с осью симметрии, направленной вдоль главной (серой) диагонали. Именно этот факт наиболее убедительно свидетельствует о частичном отбеливании исходного изображения. После пятой итерации этот веретенообразный кластер стал еще более узким, чем предыдущие, но он все еще имеет незначительное утолщение вблизи начала координат. Это говорит о том, что еще незначительное число пикселей осталось цветными, но их значительная часть все же обелилась.

Интересно поведение энтропии при переходе от исходного изображения к преобразованным. Исходное изображение имеет энтропию около 24 бит на один пиксел. После первой итерации энтропия упала до значения 16.2 бит/пиксел, после пятой она достигла значения 4.2 бит/пиксел. Таким образом, после пятой ите-

рации мы достигли коэффициента сжатия $K = 24/4.2 = 5.7$. Этот факт означает, что обесцвечивающие преобразования обладают хорошим сжимающим свойством при сжатии без потерь. Следует здесь заметить, что энтропия подсчитана для всех трех каналов. В действительности эти каналы содержат почти одинаковую информацию и можно хранить только один канал плюс дополнительную информацию о небольшом числе цветных пикселей. Поэтому реальный коэффициент сжатия может быть почти в три раза выше величины 5.7 раз.

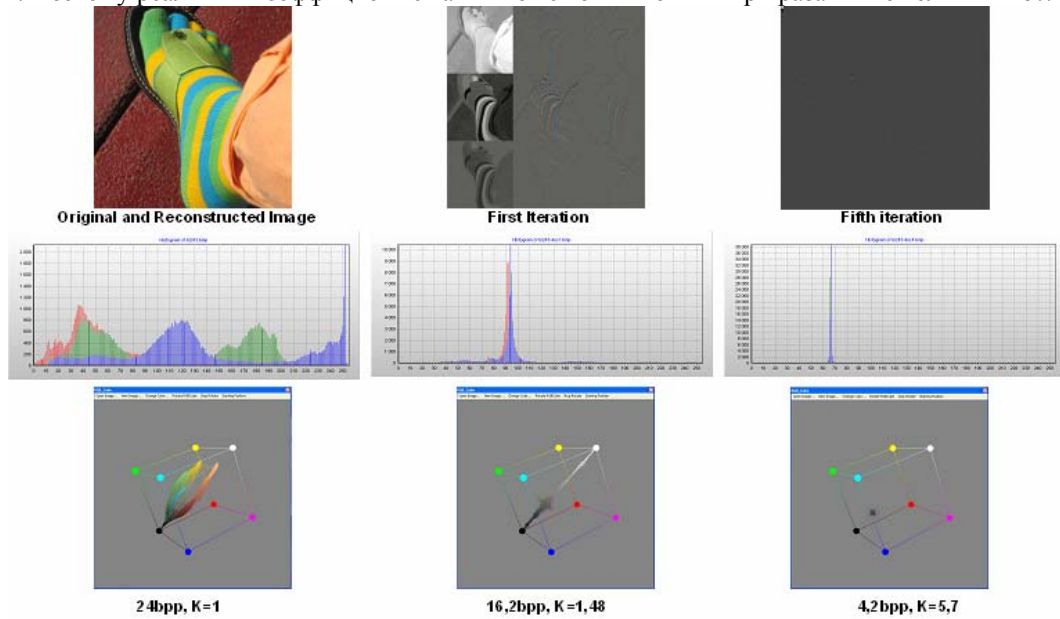


Рис. 1. Одномерные и трехмерные гистограммы исходного и преобразованных (после первой и пятой итераций) изображений

Литература

1. L.-Rundblad E.V., Labunets V.G., Maidan A.N., Novak P. "Fast Color Wavelet Transforms for Image processing", *Computational Noncommutative Algebra and Applications*. NATO Science Series. Editors: J. Byrnes and G. Ostheimer, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston-London, 2003: pp.401-410

DECOLORING THREE-ADIC TRIPLET WAVELET TRANSFORMS

Kalugina L., Gusev O., Ostheimer-Labunets E., Labunets V.

Urals State Technical University - UPI

It is known that color images have three RGB-components $f^{col}(x, y) = (f_R(x, y), f_G(x, y), f_B(x, y))$. In this work we interpret color images as functions $f_{col}(x) = f_R(x, y)1 + f_G(x, y)\varepsilon^1 + f_B(x, y)\varepsilon^2$, having their values in triplet algebra $A_3^{col} := R1 + R\varepsilon^1 + R\varepsilon^2$, where R is the real field, $\varepsilon^1, \varepsilon^2$ are three hyperimaginary and $\varepsilon^3 = 1$. Numbers $C = r1 + g\varepsilon + b\varepsilon^2$ was first invented by Ch. Grevs for constructing 3-dimensional complex numbers. These numbers are called triplet numbers. We will call them as color numbers. With help these numbers we will construct new class wavelet transforms for digital color image processing.

Classical dyadic Haar wavelet transform (for color image processing) is generated by Walsh (6x6)-matrix

$$F_2 \otimes I_3 = \begin{bmatrix} 1 & +1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \otimes I_3 = \begin{bmatrix} I_3 & +I_3 \\ I_3 & -I_3 \end{bmatrix}; WHT_2^{col}[F_2 \otimes I_3] = \prod_{j=1}^n \left[\begin{bmatrix} I_{2^{n-j}} \otimes [I_3 + I_3] \\ I_{2^{n-j}} \otimes [I_3 - I_3] \end{bmatrix} \oplus I_{3(2^n - 2^{n-j+1})} \right]$$

Classical three-adic Haar wavelet transform (for color image processing) is generated by Walsh (9x9)-matrix

$$F_3(\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}) \otimes I_3 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \otimes I_3 = \begin{bmatrix} a_{11}I_3 & a_{12}I_3 & a_{13}I_3 \\ b_{21}I_3 & b_{22}I_3 & b_{23}I_3 \\ c_{31}I_3 & c_{32}I_3 & c_{33}I_3 \end{bmatrix}$$

where $\hat{a} = (a_{11}, a_{12}, a_{13})$, $\hat{b} = (b_{21}, b_{22}, b_{23})$, $\hat{c} = (c_{31}, c_{32}, c_{33})$ are three orthogonal vectors.

In this work we introduce and investigate a new class so called decoloring three-adic triplet преобразований

$$WHT_{3^n}[F_3(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})] = \prod_{j=1}^n \left[\begin{array}{c} I_{3^{n-i}} \otimes [A_{11} \ A_{12} \ A_{13}] \\ I_{3^{n-i}} \otimes [B_{21} \ B_{22} \ B_{23}] \\ I_{3^{n-i}} \otimes [C_{31} \ C_{32} \ C_{33}] \end{array} \right] \oplus I_{3^{n-3^{n-i+1}}}, \text{ where } F_3(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ C_{31} & C_{312} & C_{33} \end{bmatrix} \text{ is}$$

an arbitrary unitary transform with triplet numbers $A_{11}, A_{12}, A_{13}, B_{21}, B_{22}, B_{23}, C_{31}, C_{32}, C_{33}$.

Spectra of color images are grey-level images after transformation by such kind of decoloring wavelet transforms. We develop fast algorithms for decoloring wavelet transforms/.

Bibliography

1. L.-Rundblad E.V., Labunets V.G., Maidan A.N., Novak P. "Fast Color Wavelet Transforms for Image processing", *Computational Noncommutative Algebra and Applications*. NATO Science Series. Editors: J. Byrnes and G. Ostheimer, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston-London, 2003: pp.401-410

