СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ АЛГОРИТМОВ ИНТЕРПОЛЯЦИИ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ

Васильев К.К., Служивый М.Н.

Ульяновский Государственный Технический университет

В настоящее время во многих приложениях возникает задача интерполяции непрерывного в R^n случайного поля (СП) $x(\bar{t}), \bar{t} \in R^n$, по дискретным наблюдениям $z(\bar{t}_i), i = 1,2,\ldots,N$, в N точках $\bar{t}_i \in R^n, i = 1,2,\ldots,N$. Соответствующие алгоритмы интерполяции применяются в системах обработки данных глобального мониторинга Земли, сжатия изображений и томографии [1], а также при проектировании многочастотных цифровых систем мобильной связи 4 поколения.

Для получения оптимальных (в смысле минимума дисперсии ошибки) оценок $\hat{x}(\bar{t})$ СП $x(\bar{t})$ по наблюдениям $z(\bar{t}), \bar{t} \in D$, обычно используются винеровские или калмановские процедуры линейной фильтрации [1-2]. Вместе с тем, в известных работах отсутствуют результаты сравнительного анализа алгоритмов интерполяции СП, т.е. получение интерполированных оценок $\hat{x}_0(\bar{t}), \bar{t} \neq \bar{t}_i, i = 1, 2, \ldots, N$, по дискретным наблюдениям $z(\bar{t}_i)$ и по оценкам $\hat{x}(\bar{t}_i),\ i = 1, 2, \ldots, N$ в отдельных точках СП. В настоящей работе получены зависимости для максимальной дисперсии ошибки интерполяции СП по наблюдениям $z(\bar{t}_i)$ и по оптимальным оценкам $\hat{x}(\bar{t}_i),\ i = 1, 2, \ldots, N$ в точках $\bar{t}_i$, находящихся в ближайших узлах одно- и двумерной прямоугольной сетки. При этом максимальная дисперсия ошибки интерполяции $\sigma_{\varepsilon 0}^2 = M\left\{\left(\hat{x}_0 - x_0\right)^2\right\}$ соответствует оценке $\hat{x}_0 = \hat{x}(\bar{t})$ в точке $\bar{t}$, находящейся в центре n-мерного параллелепипеда. Алгоритмы интерполяции по зашумленным наблюдениям $z(\bar{t}_i)$ были рассмотрены в работе [3]. В данной работе рассмотрены алгоритмы интерполяции по оптимальным оценкам $\hat{x}(\bar{t}_i),\ i = 1, 2, \ldots, N$ случайного поля. При одинаковой «информативности» всех оценок интерполяционная оценка имеет вид:

$\hat{x}_0 = \alpha_0 \sum_{i=1}^{N} \hat{x}(\bar{t}_i) = \alpha_0 \sum_{i=1}^{N} \hat{x}_i$, где α_0 - оптимальный весовой коэффициент, вычисляемый из условия минимума дисперсии ошибки интерполяции $d\sigma_{\varepsilon 0}^2 / d\alpha = 0$.

Получены сравнительные аналитические и графические зависимости относительной дисперсии ошибки интерполяции по зашумленным наблюдениям $z(\bar{t}_i)$ и по оценкам $\hat{x}(\bar{t}_i)$ для одно- и двумерного случаев, соответственно в зависимости от интервала корреляции $m = 1/(1-\rho)$ случайного поля при различных отношениях сигнал-шум $q = \sigma_X^2 / \sigma_\theta^2$.

Показано, что при больших коэффициентах корреляции $\rho > 0.99$ достигается существенный выигрыш по дисперсии оптимальной линейной интерполяции по оценкам $\hat{x}(\bar{t}_i)$ по сравнению с интерполяцией по зашумленным наблюдениям $z(\bar{t}_i)$.

Литература

1. Цифровая обработка изображений в информационных системах. Уч.пос. / И.С.Грузман, В.С.Киричук и др. – Новосибирск: НГТУ, 2002. – 352 с.
2. Прикладная теория случайных процессов и полей / Под ред. К.К. Васильева и В.А. Омельченко. – Ульяновск: УлГТУ, 1995. – 256 с.
3. Васильев К. К., Служивый М. Н. Восстановление случайных полей по дискретным отсчетам // Труды РНТОРЭС им. А.С.Попова, серия: Цифровая обработка сигналов и её применение, вып. VII-2, 7-я Международная научно-техническая конференция, Москва, 2005, с.345-349.

———————♦———————

COMPARATIVE ANALYSIS OF RANDOM FIELDS INTERPOLATION ALGORITHMS

Vasiliev K., Sluzhivyi M.

The Ulyanovsk State Technical University

At present time in many applications the problem of interpolation of continuous in R^n random field (RF) $x(\bar{t}), \bar{t} \in R^n$ on the basis of the discrete observations $z(\bar{t}_i), i = 1,2,\ldots,N$ in N points $\bar{t}_i \in R^n, i = 1,2,\ldots,N$ appears. The corresponding interpolation algorithms are applied in the systems of data processing for the Earth global monitoring, image compression and tomography [1] and also when developing 4th generation multicarrier digital communication systems.

To obtain optimal (in the sense of estimation error variance minimum) estimates $\hat{x}(\overline{t})$ of RF $x(\overline{t})$ on the basis of the observations $z(\overline{t}), \overline{t} \in D$ Kalman and Wiener linear filtering procedures are usually used [1-2]. Along with this in well-known works the results of comparative analysis of RF interpolation algorithms are practically missing, i.e. obtaining the estimates $\hat{x}(\overline{t}), \overline{t} \neq \overline{t}_i, i = 1, 2, \ldots, N$ on the basis of discrete observations $z(\overline{t}_i)$ and on the basis of the estimates $\hat{x}(\overline{t}_i),\ i = 1, 2, \ldots, N$ in separate points of RF. In the present work relatively simple formulas for RF interpolation error maximal variance in R^n on the basis of the observations $z(\overline{t}_i)$ and on the basis of the estimates $\hat{x}(\overline{t}_i),\ i = 1, 2, \ldots, N$ in points $\overline{t}_i$, located in the nearest corners of one- and two-dimensional rectangular grid are presented. At that estimation error maximal variance $\sigma_\varepsilon^2 = M\left\{(\hat{x}_0 - x_0)^2\right\}$ will correspond to the estimate $\hat{x}_0 = \hat{x}(\overline{t})$ in the point $\overline{t}$, located in the centre of n-dimensional parallelepiped.

The algorithms of interpolation on the basis of the observations $z(\overline{t}_i)$ are considered in work [3]. In the given paper the algorithms of interpolation on the basis of the estimates $\hat{x}(\overline{t}_i),\ i = 1, 2, \ldots, N$ of a random field. At equal information density of all the estimates the interpolation estimate has the following form: $\hat{x}_0 = \alpha_0 \sum_{i=1}^{N} \hat{x}(\overline{t}_i) = \alpha_0 \sum_{i=1}^{N} \hat{x}_i$, where α_0 - optimal weight coefficient, calculated from the condition of interpolation error variance minimum $d\sigma_{\varepsilon 0}^2 / d\alpha = 0$.

Comparative graphical and analytical dependencies of error relative variance for interpolation on the basis of the discrete observations $z(\overline{t}_i)$ and on the basis of the estimates $\hat{x}(\overline{t}_i)$ for one- and two-dimensional cases, correspondingly versus correlation interval $m = 1/(1-\rho)$ of the random field at various signal-to-noise ratios $q = \sigma_X^2 / \sigma_\theta^2$.

It is shown that at high correlation coefficients $\rho > 0.99$ significant gain in variance of optimal linear interpolation on the basis of the estimates $\hat{x}(\overline{t}_i)$ in comparison with interpolation on the basis of the noisy observations $z(\overline{t}_i)$ is obtained.

REFERENCES

1. Digital Image Processing in Informational Systems. Tutorial/ I.S.Gruzman, V.S.Kirichuck et al. – Novosibirsk: NSTU, 2002. – 352 p. (in Russian)

2. Applied Theory of Random Processes and Fields. Edited by K.K.Vasiliev and V.A.Omelchenko. – Ulyanovsk: UlSTU, 1995. – 256 p. (in Russian)

3. Vasiliev K.K., Sluzhivyi M.N. Random Field Restoration on the basis of Discrete Samples // Proceedings of the 7th International Conference Digital signal processing and its applications, vol. VII-2, Moscow, 2005, pp.345-349.