

**ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СХОДИМОСТИ ОЦЕНОК ПАРАМЕТРОВ
МЕЖКАДРОВЫХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ ИЗОБРАЖЕНИЙ ПРИ
ПСЕВДОГРАДИЕНТНОМ ОЦЕНИВАНИИ**

Ташлинский А.Г., Минкина Г.Л.

Ульяновский государственный технический университет

При псевдоградиентном оценивании [1] правило формирования оценки $\hat{\alpha}_{i,t}$ параметра α_i на текущей t -й итерации предполагает дискретное изменение предыдущей оценки $\hat{\alpha}_{i,t-1}$ [2]:

$$\hat{\alpha}_t = \hat{\alpha}_{t-1} + \Delta \hat{\alpha}_t, \tag{1}$$

где $\Delta \hat{\alpha}_t = -\Lambda_t \bar{\beta}_t(Q(Z_t, \hat{\alpha}_{t-1}))$; $\bar{\beta}$ - псевдоградиент целевой функции (ЦФ) Q ; Λ_t - матрица усиления, задающая величину изменения оценок параметров; Z_t - локальная выборка отсчетов изображений, по которой с учетом оценок $\hat{\alpha}_{i,t-1}$ вычисляется псевдоградиент. Очевидно, что при этом возможны только три события: изменение оценки направлено от оптимального значения с вероятностью $\rho_i^-(\bar{\varepsilon}_t)$, оценка не изменилась с вероятностью $\rho_i^0(\bar{\varepsilon}_t)$, изменение оценки направлено к оптимальному значению параметра с вероятностью $\rho_i^+(\bar{\varepsilon}_t) = 1 - \rho_i^0(\bar{\varepsilon}_t) - \rho_i^-(\bar{\varepsilon}_t)$, где $\varepsilon_{i,t} = \hat{\alpha}_{i,t} - \alpha_i^*$, $i = \overline{1, m}$ - рассогласование оптимального значения параметра α_i^* и его оценки на t -й итерации, m - число оцениваемых параметров. Отметим также, что вероятность $\rho_i^+(\bar{\varepsilon}_t)$ - это вероятность того, что направление проекции псевдоградиента на ось параметра α_i совпадает с истинным направлением проекции градиента. Например, если ЦФ процедуры (1) максимизируется и $\varepsilon_{it} > 0$, то

$$\rho_i^+(\bar{\varepsilon}_t) = P\{\bar{\beta}_i < 0\} = \int_{-\infty}^0 w(\beta_i(Z_t, \hat{\alpha}_{i,t-1})) d\beta_i, \tag{2}$$

где $w(\beta_i(Z_t, \hat{\alpha}_{i,t-1}))$ - плотность распределения вероятностей (ПРВ) проекции β_i на ось α_i .

Используя вероятность (2) можно найти математическое ожидание оценки параметра α_i на t -й итерации:

$$M[\hat{\alpha}_{it}] = (\hat{\alpha}_{i,t-1} + \lambda_{i,t})\rho^-(\bar{\varepsilon}_{t-1}) + \hat{\alpha}_{i,t-1}\rho^0(\bar{\varepsilon}_{t-1}) + (\hat{\alpha}_{i,t-1} - \lambda_{i,t})\rho^+(\bar{\varepsilon}_{t-1}) = \hat{\alpha}_{i,t-1} - \lambda_{i,t}(\rho^+(\bar{\varepsilon}_{t-1}) - \rho^-(\bar{\varepsilon}_{t-1})) \tag{3}$$

При этом изменения по отношению к значению оценки на $(t-1)$ -й итерации составят величину $-\lambda_{i,t}(\rho^+(\bar{\varepsilon}_{t-1}) - \rho^-(\bar{\varepsilon}_{t-1}))$. Если $\rho^+(\bar{\varepsilon}_{t-1}) > \rho^-(\bar{\varepsilon}_{t-1})$, то оценка улучшится, если же $\rho^+(\bar{\varepsilon}_{t-1}) < \rho^-(\bar{\varepsilon}_{t-1})$ - ухудшится. Величину

$$\mathfrak{R}_i = \rho_i^+(\bar{\varepsilon}) - \rho_i^-(\bar{\varepsilon}),$$

диапазон изменения которой от -1 до +1, назовем коэффициентом улучшения оценки (КУО)

$$\mathfrak{R}_i = \int_{-\infty}^0 w(\beta_i(Z_t, \hat{\alpha}_{i,t-1})) d\beta_i - \int_0^{\infty} w(\beta_i(Z_t, \hat{\alpha}_{i,t-1})) d\beta_i$$

Заметим, что если оценки $\hat{\alpha}$ коррелированы, то поведение КУО параметров может носить сложный характер с несколькими локальными экстремумами. Для примера на рис. 1 приведена зависимость КУО $\mathfrak{R}(\varepsilon_\varphi)$ для угла поворота при оценивании угла поворота φ и коэффициента масштаба k .

Рассмотрим нахождение КУО для нескольких ЦФ. Пусть в качестве ЦФ псевдоградиентного оценивания выбран средний

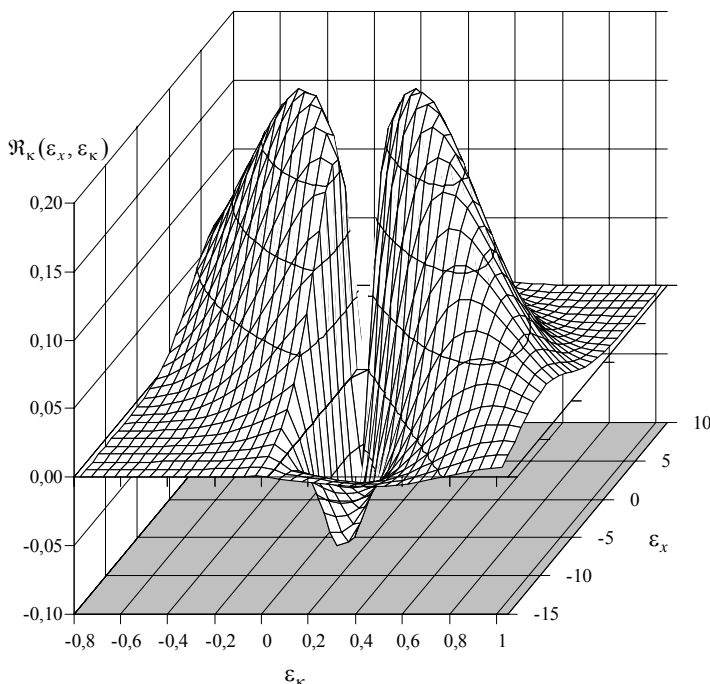


Рис. 1. Пример КУО для угла поворота при оценивании угла поворота и коэффициента масштаба

квадрат межкадровой разности (СКМР) [3]. Тогда оценка ЦФ на каждой итерации может быть найдена по соотношению:

$$q_t = \frac{1}{\mu} \sum_{\bar{j}_t \in \Omega_t} \left(z_{\bar{j}_t}^{(2)} - \tilde{z}^{(1)}(\bar{j}_t, \hat{\alpha}_{t-1}) \right)^2,$$

где μ - объем локальной выборки (ОЛВ) $Z_t = \{z_{\bar{j}_t}^{(2)}, \tilde{z}^{(1)}(\bar{j}_t, \hat{\alpha}_{t-1})\}$ на t -й итерации, $\bar{j}_t \in \Omega_t \in \Omega$ - координаты отсчетов изображения $Z^{(2)}$, попавшие в локальную выборку на t -й итерации; $\tilde{Z}^{(1)} = \tilde{z}^{(1)}(\bar{j}, \hat{\alpha})$ - непрерывное изображение, полученное из $Z^{(1)}$ с помощью некоторой аппроксимации. Будем также считать, что исследуемые изображения $Z^{(1)}$ и $Z^{(2)}$, заданные на сетке отсчетов $\Omega_{\bar{j}} = \{(j_x, j_y)^T\}$, $j_x = \overline{1, N_x}$, $j_y = \overline{1, N_y}$, имеют гауссовское распределение яркостей с нулевым средним и автокорреляционной функцией (АКФ) $R(l)$. Модель наблюдаемых изображений: $\{z_j^{(1)}\} = \{s_j^{(1)} + \theta_j^{(1)}\}$, $\{z_j^{(2)}\} = \{s_j^{(1)}(\bar{\alpha}) + \theta_j^{(2)}\}$, где $\{\theta_j^{(1)}\}$, $\{\theta_j^{(2)}\}$ - независимые гауссовские случайные поля с нулевыми средними и одинаковыми дисперсиями σ_θ^2 .

Для определенности примем аффинную модель межкадровых геометрических деформаций изображений (МГДИ), при которой вектор $\bar{\alpha} = (h_1, h_2, \varphi, \kappa)^T$ оцениваемых параметров включает в себя параллельный сдвиг (h_1, h_2) , угол поворота φ и масштабный коэффициент κ . Примем $\rho_i^0(\bar{\epsilon}_i) = 0$, при этом

$$\mathfrak{R}_i = 2\rho_i^+(\bar{\epsilon}) - 1. \quad (4)$$

Таким образом, в соответствии с (4) для вычисления \mathfrak{R}_i необходимо найти ПРВ $w(\beta_i)$ проекции β_i псевдоградиента $\bar{\beta}$ на ось параметра α_i . Для нахождения $w(\beta_i)$ воспользуемся результатами, полученными в работах [4].

При принятых ограничениях для β_i можно показать, что

$$\beta_i = \frac{1}{\mu} \sum_{l=1}^{\mu} \left(z_{j_{xl}, j_{yl}}^{(2)} - \tilde{z}_i^{(1)}(\bar{j}_i, \hat{\alpha}) \right) \left(\tilde{z}_i^{(1)}(j_{xl}+1, j_{yl}, \hat{\kappa}, \hat{\varphi}) - \tilde{z}_i^{(1)}(j_{xl}-1, j_{yl}, \hat{\kappa}, \hat{\varphi}) \right) \gamma_i + \left(\tilde{z}_i^{(1)}(j_{xl}, j_{yl}+1, \hat{\kappa}, \hat{\varphi}) - \tilde{z}_i^{(1)}(j_{xl}, j_{yl}-1, \hat{\kappa}, \hat{\varphi}) \right) \zeta_i \quad (5)$$

где значения γ_i и β_i - функции, зависящие от параметра МГДИ. Для рассматриваемого набора параметров γ_i и β_i приведены в таблице 1.

Непосредственное нахождение ПРВ β_i , определяемой выражением (5), является весьма сложной задачей. Однако приближенное решение можно получить, воспользовавшись тем обстоятельством, что при увеличении μ величина β_i быстро нормализуется. Благодаря этому закон распределения β_i можно считать близким к нормальному. Тогда КУО \mathfrak{R}_i , $i = \overline{1, m}$, с учетом (2) и (3) может быть найден как

$$\mathfrak{R}_i(\bar{\epsilon}) = 2F\left(\frac{M\{\beta_i\}}{\sigma\{\beta_i\}}\right) - 1, \quad (6)$$

где $F(\cdot)$ - функция Лапласа; $M\{\beta_i\}$ и $\sigma\{\beta_i\}$ - математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение проекции β_i . Несложно показать, что

$$M\{\beta_i\} = -\sum_{l=1}^{\mu} \sigma_s^2 \left(\left(R(d_{x-1,y}^{(l)}) - R(d_{x+1,y}^{(l)}) \right) \gamma_i + \left(R(d_{x,y-1}^{(l)}) - R(d_{x,y+1}^{(l)}) \right) \zeta_i \right); \quad (7)$$

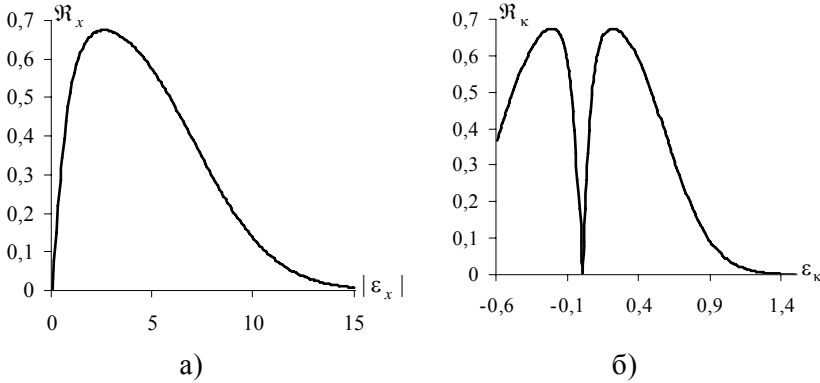
$$\sigma^2\{\beta_i\} = 4 \sum_{l=1}^{\mu} \sigma_s^4 \left(\left(\gamma_i^2 + \zeta_i^2 \right) \left(1 - R(d_{x,y}^{(l)}) \right) \left(1 - R(2) \right) g^{-1} \left(2 - R(d_{x,y}^{(l)}) - R(2) + g^{-1} \right) \right) + \left(\gamma_i \left(R(d_{x-1,y}^{(l)}) - R(d_{x+1,y}^{(l)}) \right) + \zeta_i \left(R(d_{x,y-1}^{(l)}) - R(d_{x,y+1}^{(l)}) \right) \right)^2, \quad (8)$$

где $d_{x-1,y}^{(l)}$ - евклидово расстояние между точкой с координатами (j_{xl}, j_{yl}) изображения $\mathbf{Z}^{(2)}$ и точкой изображения $\tilde{\mathbf{Z}}^{(1)}$ с оцененными координатами (a_l, b_l) , $l = \overline{1, \mu}$; γ_{il} и ζ_{il} - функции γ и ζ для i -го параметра в точке (a_l, b_l) ; $g = \sigma_x^2 / \sigma_0^2$ - отношение сигнал/шум.

Табл. 1

Оцениваемый параметр	Функция	
	γ_i	ζ_i
h_1	1	0
h_2	0	1
κ	$(a_l - j_{1o})\cos v - (b_l - j_{2o})\sin v$	$(a_l - j_{1o})\sin v + (b_l - j_{2o})\cos v$
φ	$-k((a_l - j_{1o})\sin v + (b_l - j_{2o})\cos v)$	$k((a_l - j_{1o})\cos v - (b_l - j_{2o})\sin v)$

Отметим также, что \mathfrak{R}_i зависит не только от модели МГДИ, АКФ изображений и параметров помех, но также и от плана локальной выборки Z_t , т.е. от взаиморасположения отсчетов (j_{xl}, j_{yl}) , $l = \overline{1, \mu}$, вошедших в локальную.



Для примера на рис. 2. приведены графики КУО \mathfrak{R} , рассчитанные с помощью формул (6)-(8), для параллельного сдвига (рис. 2,а) и коэффициента масштаба (рис. 2,б) как функции рассогласований соответственно $\varepsilon_x = \hat{h}_x - h_x^*$ и $\varepsilon_\kappa = \hat{\kappa} - \kappa^*$, где h_x^* и κ^* в данном случае точные значения сдвига и коэффициента масштаба. При расчете предполагались следующие параметры кадров изображений: АКФ – гауссовская с радиусом

Рис. 2. Зависимость КУО от рассогласования при СКМР

корреляции 5, отношения сигнал/шум $g_1 = g_2 = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_0^2} = 10$.

Для случая, когда в качестве ЦФ выбран выборочный коэффициент корреляции (ВКМК) оценкой ЦФ служит величина

$$q_i = \frac{\frac{1}{\mu} \sum_{l=1}^{\mu} \tilde{z}_l^{(1)} z_{j_l}^{(2)} - \frac{1}{\mu^2} \sum_{l=1}^{\mu} \tilde{z}_l^{(1)} \sum_{l=1}^{\mu} z_{j_l}^{(2)}}{\hat{\sigma}_{z_1} \hat{\sigma}_{z_2}}, \text{ где } \tilde{z}_l^{(1)} = \tilde{z}^{(1)}(\bar{j}_l, \bar{j}_0, \bar{\alpha}) - l\text{-й отсчет интерполированного}$$

кадра $\tilde{\mathbf{Z}}^{(1)}$ в локальной выборке Z_t .

Для проекции β_i псевдоградиента $\bar{\beta}$ на ось параметра α_i можно записать:

$$\beta_i = \frac{\sum_{l=1}^{\mu} z_{j_l}^{(2)} \left(\frac{\partial \tilde{z}_l^{(1)}}{\partial \alpha_i} \sum_{t=1}^{\mu} (\tilde{z}_t^{(1)})^2 - \tilde{z}_l^{(1)} \sum_{t=1}^{\mu} \tilde{z}_t^{(1)} \frac{\partial \tilde{z}_t^{(1)}}{\partial \alpha_i} \right)}{\mu^2 \left(\sum_{l=1}^{\mu} (\tilde{z}_l^{(1)})^2 \right)^{3/2} \left(\sum_{l=1}^{\mu} (z_{j_l}^{(2)})^2 \right)^{1/2}}. \text{ Тогда}$$

$$M[\beta_i] = \frac{1}{2\mu} \left(1 - \frac{1}{\mu} \sum_{l=1}^{\mu} (\gamma_{il} (R(d_{x-1,y}^{(l)}) - R(d_{x+1,y}^{(l)})) + \zeta_{il} (R(d_{x,y-1}^{(l)}) - R(d_{x,y+1}^{(l)}))) \right), \quad (9)$$

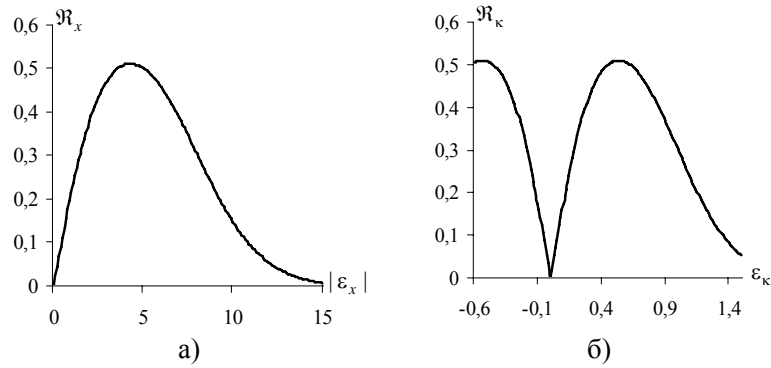


Рис. 3. Зависимость КУО от рассогласования при ВКМК

$$\sigma^2[\beta_i] = \frac{1}{\mu^2} \sum_{\ell=1}^{\mu} \left(\frac{1}{2} (\gamma_{i\ell}^2 + \zeta_{i\ell}^2) \left(\left(1 - \frac{1}{\mu} \right) (1 - R(2)) + g_1^{-1} (1 - R(2) + g_2^{-1}) + g_2^{-1} \right) + \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{\mu} \right)^2 (\gamma_{i\ell} (R(d_{x-1,y}^{(i)}) - R(d_{x+1,y}^{(i)})) + \zeta_{i\ell} (R(d_{x,y-1}^{(i)}) - R(d_{x,y+1}^{(i)})))^2 \right) \quad (10)$$

Для примера на рис. 3 приведены графики КУО \mathfrak{R} , рассчитанные при $\mu=3$ с помощью полученных формул (6), (9) и (10), для параллельного сдвига рис .3,а и коэффициента масштаба рис .3,б. Параметры изображения соответствуют предыдущему примеру. Из графиков видно, что при аналогичных параметрах КУО \mathfrak{R}_x и \mathfrak{R}_k несколько меньше, чем при ВКМК.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 05-08-65472-а)

Литература

1. Цыпкин Я.З. Информационная теория идентификации - М.: Наука. Физматлит, 1995. – 336 с.
2. Ташлинский А.Г., Тихонов В.О. Методика анализа погрешности псевдоградиентного измерения параметров многомерных процессов / Известия вузов: Радиоэлектроника, Т. 44, № 9, 2001. – С. 75-80.
3. Ташлинский А.Г. Псевдоградиентное оценивание пространственных деформаций последовательности изображений / Научные технологии Т. 3, № 3, 2002. – С. 32-43.
- 4 Ташлинский А.Г., Кочкадаев А.В., Минкина Г.Л. Выбор целевых функций и псевдоградиента при оценивании межкадровых геометрических деформаций изображений / Вестник УлГТУ, № 3-4, 2003. - С. 54-56.

PROBABILISTIC CHARACTERISTICS OF IMAGE INTERFRAME GEOMETRICAL DEFORMATIONS PARAMETERS ESTIMATES CONVERGENCE AT PSEUDOGRADIENT ESTIMATION

Tashlinskii A., Minkina G.

The Ulyanovsk State Technical University

At pseudogradient estimation [1] of image interframe geometrical deformations the estimate $\hat{\alpha}_{i,t}$ formation rule for the parameter α_i at current t -th iteration assumes discrete change of the previous estimate $\hat{\alpha}_{i,t-1}$ [2]:

$\hat{\alpha}_t = \hat{\alpha}_{t-1} + \Delta \hat{\alpha}_t$, where $\Delta \hat{\alpha}_t = -\Lambda_t \bar{\beta}_t(Q(Z_t, \hat{\alpha}_{t-1}))$; $\bar{\beta}$ – pseudogradient of the goal function Q ; Λ_t – gain matrix, which assigns the value of parameters estimates change; Z_t – local sample of image samples. It is obvious that in this case only three events are possible: the estimate change is directed away from the optimal value with probability $\rho_i^-(\bar{\epsilon}_t)$, the estimate did not change with probability $\rho_i^0(\bar{\epsilon}_t)$, the estimate change is directed towards the optimal parameter value with probability $\rho_i^+(\bar{\epsilon}_t) = 1 - \rho_i^-(\bar{\epsilon}_t) - \rho_i^0(\bar{\epsilon}_t)$, where $\epsilon_{i,t} = \hat{\alpha}_{i,t} - \alpha_i^*$, $i = \overline{1, m}$ – misalignment of the optimal value of the parameter α_i^* and its estimate at the t -th iteration, m – number of the parameters to be estimated. It should also be noted that the probability $\rho_i^+(\bar{\epsilon}_t)$ – is the probability of

the fact that the direction of pseudogradient projection onto the parameter α_i axis coincides with the true direction of pseudogradient projection.

By means of the probabilities $\rho_i^-(\bar{\epsilon}_t)$ and $\rho_i^+(\bar{\epsilon}_t)$ it is possible to find the mathematical expectation of the estimate at the t -th iteration $M[\hat{\alpha}_{it}] = \hat{\alpha}_{i,t-1} - \lambda_{i,t}(\rho^+(\bar{\epsilon}_{t-1}) - \rho^-(\bar{\epsilon}_{t-1}))$.

At that with respect to the estimate value at the $(t-1)$ -th iteration the variations will come to the value $-\lambda_{i,t}(\rho^+(\bar{\epsilon}_{t-1}) - \rho^-(\bar{\epsilon}_{t-1}))$. Here the concept of estimate improvement (EIC) \mathfrak{R}_i is introduced, which is equal to $\mathfrak{R}_i = \rho_i^+(\bar{\epsilon}) - \rho_i^-(\bar{\epsilon})$. It is shown that if the estimates $\hat{\alpha}$ are interdependent the behavior of EIC parameters may have complex character with several local extremums.

Expressions for calculation of EIC when interframe difference mean square and interframe correlation sample coefficient are used in the capacity of pseudogradient estimation goal functions are obtained.

Examples of EIC graphs for the parameters of deformations parameters affine model in which the vector of the parameters to be estimated includes parallel shift, turning angle and scale factor coefficient are presented.

The work was supported by RFBR (grant 05-08-65472-a)

References

1. Tsyppin Ya.Z. Information theory of identification – Moscow: Science.Fizmatlit, 1995. – 336 p.
2. Tachlinskii A.G. The Efficiency of Pseudogradient Procedures for the Estimation of Image Parameters with a Finite Number of Iterations / Pattern Recognition and Image Analysis, Vol.8, 1998. - Pp. 260-261.