ВОССТАНОВЛЕНИЕ МНОГОМЕРНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИГНАЛОВ НА ОСНОВЕ НЕРАЗДЕЛИМЫХ ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Наместников С.М. [1]

Ульяновский государственный технический университет

На сегодняшний день отсутствует математический аппарат для синтеза многомерных неразделимых вейвлетов. Вместе с тем, многими исследователями в данной области отмечается, что неразделимый вейвлет-анализ позволит достичь лучших результатов в самых разных прикладных областях: распознавание образов, фильтрация сигналов, сжатие изображений и др. В данной статье рассматривается задача восстановления дискретного сигнала X заданного на многомерной прямоугольной сетке $\Omega=\left\{\bar{j}=(j_1,...,j_n),\, j_i=\overline{1,N_i}, i=\overline{1,n}\right\}$ по вейвлет-коэффициентам наблюдаемым на фоне гауссовского шума $z_{\bar{j}}=c_{\bar{j}}+\xi_{\bar{j}}$, $\bar{j}\in\Omega$, где $\xi_{\bar{j}}$ - некоррелированные гауссовские случайные величины (СВ) с нулевым математическим ожиданием (МО) и дисперсией σ_{ξ}^2. Решение данной задачи приводит к неразделимым вейвлетам на этапе синтеза.

Если в качестве критерия оптимальности выбрать минимум среднеквадратического отклонения (СКО), то для оптимального алгоритма восстановления должно выполняться условие

$\sigma_{\varepsilon_{\bar{j}}}^2=M\left\{\left(x_{\bar{j}}-\hat{x}_{\bar{j}}\right)^2\right\}\to\min$, где $x_{\bar{j}}$ - истинное значение сигнала X в точке $\bar{j}$; $\hat{x}_{\bar{j}}$ - восстановленное значение отсчета. Оценка элемента $\hat{x}_{\bar{j}}$ строится в виде линейной комбинации наблюдаемых вейвлет-коэффициентов $z_{\bar{i}}$ с коэффициентами восстанавливающего фильтра $h_{\bar{i}}$, $\forall\bar{i}\in\Omega$:

$$\hat{x}_{\bar{j}}=\sum_{i_1}\sum_{i_2}...\sum_{i_n} z_{\bar{i}}h_{\bar{i}}^{(j)}\,. \qquad (1)$$

Данное выражение можно записать в более удобной форме если представить многомерный сигнал в виде вектора, используя тот или иной способ упорядочивания элементов многомерной матрицы X:

$\hat{x}_j=\sum_i \tilde{z}_i\tilde{h}_i^{(j)}=\tilde{Z}^T\tilde{H}_j$, где $\tilde{Z}$ - вектор столбец с упорядоченными определенным образом вейвлет-коэффициентами; H_j - вектор коэффициентов восстанавливающего фильтра для j-го отсчета.

В свою очередь вейвлет-коэффициенты c_j формируются как свертка многомерного сигнала X с базисными векторами φ_j некоторого известного разделимого вейвлет-преобразования. Следовательно, наблюдения $\tilde{Z}$ можно выразить непосредственно через сигнал: $\tilde{Z}=\begin{vmatrix}\tilde{\varphi}_1\\ \tilde{\varphi}_2\\ ...\\ \tilde{\varphi}_n\end{vmatrix}\tilde{X}+\begin{vmatrix}\tilde{\xi}_1\\ \tilde{\xi}_2\\ ...\\ \tilde{\xi}_n\end{vmatrix}=\tilde{\Phi}\tilde{X}+\tilde{\tilde{\xi}}$, где $\tilde{X}$ - вектор столбец с упорядоченными элементами многомерного сигнала X; $\tilde{\Phi}$ - матрица преобразования, состоящая из базисных векторов синтеза $\tilde{\varphi}_i$; $\tilde{\tilde{\xi}}$ - вектор некоррелированных гауссовских СВ с нулевым МО и дисперсией σ_{ξ}^2. В данных обозначениях дисперсия ошибки восстановления запишется как

$$\sigma_{\varepsilon i}^2=M\left\{\left[\tilde{x}_i-\tilde{H}_i^T\left(\tilde{\Phi}\tilde{X}+\tilde{\tilde{\xi}}\right)\right]^2\right\},$$

откуда путем дифференцирования по $\tilde{H}_i^T$ находится оптимальный вектор весовых коэффициентов:

$$\tilde{H}_{iopt}^T=P_i^T\left(\tilde{\Phi}R_{\tilde{x}\tilde{x}}\tilde{\Phi}^T+V_{\tilde{\xi}}\right)^{-1}, \qquad (2)$$

---

[1] Наместников С.М., к.т.н., доцент кафедры «Телекоммуникации», E-mail: sernam@ulstu.ru

где $P_i^T = M\left\{\widetilde{x}_i \widetilde{X}\right\}$ - вектор взаимных ковариаций между элементом $\widetilde{x}_i$ и элементами вектора $\widetilde{X}$; $V_\xi = M\left\{\widetilde{\overline{\xi}}\widetilde{\overline{\xi}}^T\right\}$ - матрица дисперсий шума наблюдения; $R_{\widetilde{X}\widetilde{X}} = M\left\{\widetilde{X}\widetilde{X}^T\right\}$ - ковариационная матрица вектора $\widetilde{X}$.

Совокупность векторов $\left\{\widetilde{H}_{iopt}\right\}$ образуют базисные вектора синтеза, из которых, путем обратного упорядочивания элементов, можно получить многомерные матрицы $\left\{H_{iopt}\right\}$ для построения оптимальных оценок согласно выражению (1). Данные матрицы в общем случае не соответствуют обратному вейвлет-преобразованию, т.к. базисные вектора синтеза не обладают свойством пространственной локализации. Однако их удается аппроксимировать локальными пространственными функциями без заметного ухудшения качества восстановления. В этом случае получается алгоритм восстановления дискретных сигналов обладающий всеми свойствами вейвлет-преобразования и использующий, в общем случае, неразделимые преобразования при восстановлении сигнала.

Проведем сравнительный анализ восстановления двумерного сигнала X, заданного авторегрессионным уравнением первого порядка, с помощью традиционного вейвлет-преобразования с коэффициентами вейвлет-фильтра $\overline{h} = [-1/8, 1/4, 3/4, 1/4, -1/8]^T$ и $g = [-1/2, 1, -1/2]^T$ и модифицированного с использованием базисных векторов синтеза найденных по формуле (2). На рис. 1 представлены выигрыши предложенного алгоритма восстановления по сравнению с традиционным, по всем вейвлет-коэффициентам и при разных корреляционных связях r между соседними отсчетами.

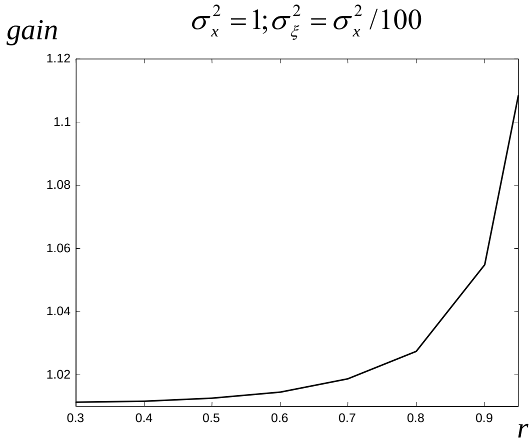

Рис. 1. График выигрыша предложенного алгоритма восстановления по сравнению с традиционномым вейвлет-преобразованием

Анализ данного рисунка показывает выигрыш предложенного алгоритма от 2% до 10% в зависимости от коэффициента корреляции r. Особенностью данного преобразования является сохранение быстрого алгоритма восстановления, т.к. матрицы синтеза имеют много почти нулевых значений, которые без заметного ухудшения качества восстановления можно приравнять нулю.

Представленный алгоритм восстановления можно успешно применять для лучшего восстановления изображений в алгоритмах сжатия с потерями, в которых вейвлет-коэффициенты подвергаются квантованию и на момент восстановления сигнала не известны точно. В результате коэффициенты разложения вейвлет-преобразования после квантования можно представить с помощью аддитивной модели наблюдения

$z_i = c_i + \xi_i$, где c_i - значение вейвлет-коэффициента до квантования; ξ_i - шум квантования с математическим ожиданием равным нулю и дисперсией σ_ξ^2. Следует отметить, что шум квантования, как правило, подчиняется равномерному закону распределения, в то время как представленный алгоритм реализуется для гауссовского шума с нормальной плотностью распределения. Однако эксперименты показали, что значение дисперсии σ_ξ^2 шума квантования можно подобрать так, чтобы алгоритм показывал хорошие результаты восстановления при разных распределениях величин шума квантования.

Литература

1. Теория и практика вейвлет-преобразования. Воробьев В.И., Грибунин В.Г., ВУС, 1999. С. 1-204.
2. Прикладная теория случайных процессов и полей / Васильев К.К., П 75 Драган Я.П., Казаков В.А. и др.; Под ред. Васильева К.К., Омельченко В.А. Ульяновск: УлГТУ, 1995. 256 с.

3. Добеши И. Десять лекций по вейвлетам. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001, 464 стр.

4. Адаптивные фильтры: Пер. с англ./Под ред. К. Ф. Н. Коуэна и П.М. Гранта. – М.: Мир, 1988. – 392 с.