

НОВЫЙ МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ЦАП

Газизов А.А.¹, Хакимов Р.А.², Максutow А.Д.², Сапельников В.М.¹

¹Башкирский государственный аграрный университет

²Башкирский государственный университет

Цифро-аналоговые преобразователи (ЦАП) широко применяются для преобразования сигналов в информационно-измерительной технике, радиотехнике и приборостроении. Они являются мощным средством увеличения точности отсчета. Однако существующие ЦАП могут выполнять только линейное преобразование вида $U_{OUT} = N \cdot U_{REF}$ (здесь N – цифровой код). В то же время в различных областях техники необходимо с высокой точностью воспроизводить нелинейные функциональные зависимости. Например, такая необходимость возникает при построении цифруправляемых фазовращателей и калибраторов фазы. Наиболее предпочтительный способ для осуществления этой операции – использование функциональных ЦАП [1].

Функциональные ЦАП строятся на базе линейных ЦАП. Нелинейные функциональные зависимости реализуются различными методами приближения (аппроксимации). В настоящее время используются два вида приближения: кусочно-линейная аппроксимация и аппроксимация степенными рядами. Каждый из упомянутых видов аппроксимации предполагает свой способ аппаратной реализации. В настоящей работе авторы впервые применили для построения функциональных ЦАП метод сплайн-аппроксимации.

Теория сплайнов и сплайн-аппроксимации является весьма важным разделом теории приближения функций. Во многих задачах сплайны являются более естественным аппаратом приближения функций, чем многочлены. К таким задачам относятся практически важные задачи интерполирования и сглаживания функций, численного дифференцирования, численного интегрирования функций, а также численного интегрирования дифференциальных уравнений.

Метод сплайновой аппроксимации заключается в разбиении участка области определения на интервалы, в каждом из которых функция заменяется многочленом третьей степени. Группа сопряженных кубических многочленов, в точках сопряжения которых первая и вторая производная непрерывны, называется кубическим сплайном. Математически эти многочлены записываются в следующем виде:

$$S_i(x) = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i, \tag{1}$$

где i – номер интервала, $i = 1..n$; n – число интервалов.

Из определения сплайна можно вывести условия его построения. В узлах x_i сплайн $S_i(x)$ принимает заданные значения y_i , $i = 0..n$; во внутренних узлах x_i , $i = 1..n-1$, сплайн имеет непрерывную первую и вторую производные; график сплайна на концах участка имеет нулевую кривизну. Математически эти условия записываются уравнениями:

$$\begin{aligned} S_i(x_{i-1}) &= y_{i-1}(x_{i-1}), & S_i'(x_i) &= S_{i+1}'(x_i), & S''(x_0) &= & 0, \\ S_i(x_i) &= y_i(x_i), & S_i'(x_i) &= S_{i+1}'(x_i), & S''(x_n) &= & 0, \end{aligned} \tag{2}$$

где $y(x)$ – аппроксимируемая функция.

По условиям (2) составляется система уравнений, решение которой позволяет определить коэффициенты a_i , b_i , c_i , d_i . Таким образом, кубический сплайн «склеен» из кубических парабол, проходит через заданные точки склеек, является гладким и имеет непрерывную кривизну.

На рисунке 1 приведена структурная схема функционального ЦАП, реализующая метод сплайн-аппроксимации. Основу этой схемы составляет цепочка трех каскадно включенных линейных ЦАП ($DAC1$ – $DAC3$). Их свойство перемножения аналогового напряжения и цифрового кода используются для получения степенной зависимости напряжения от кода [2].

$$\text{Формирование выходного сигнала происходит по закону: } \dot{U}_{OUT} = S_i(x) \dot{U}_{REF}. \tag{3}$$

Здесь, для примера, $S_i(x) = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i \cong \sin(\pi x/2)$ – сплайн, аппроксимирующий функцию $\sin(\pi x/2)$; x – относительное значение цифрового кода N/N_{max} , подаваемого на входы всех ЦАП, и изменяющееся в интервале $[0; 1]$; N_{max} – максимальное значение цифрового кода N . Таким образом, изменение величины x в интервале $[0; 1]$ позволяет регулировать зависимость $\sin(\pi x/2)$ в диапазоне от 0 до $\pi/2$.

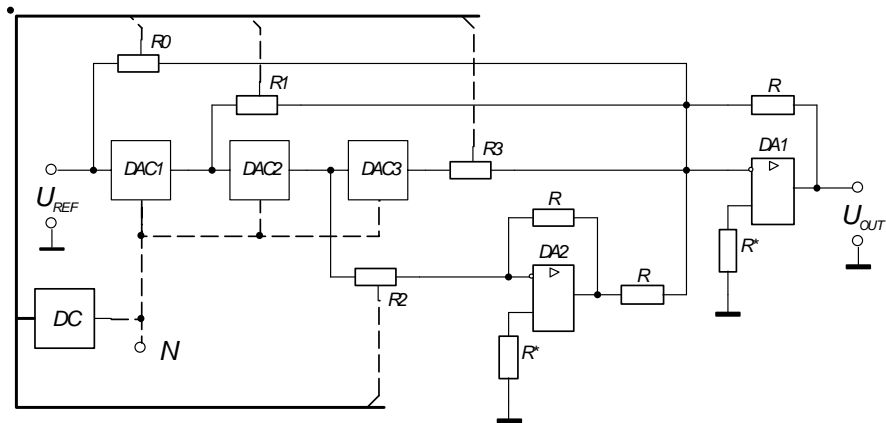


Рис. 1 – Структурная схема функционального ЦАП

Каждый из каскадно соединенных ЦАП (см. рисунок 1) умножает сигнал, поступающий на его аналоговый вход, на величину x и изменяет его полярность. Поэтому на выходах цифро-аналоговых преобразователей $DAC1 - DAC3$ получаем напряжения: $-xU_{вх}$, $x^2 U_{вх}$, $-x^3 U_{вх}$. Т.о. выходные напряжения $DAC1 - DAC3$ моделируют слагаемые полиномов (1).

Напряжения с выходов ЦАП суммируются на операционных усилителях $DA1$ и $DA2$ с соответствующими коэффициентами, определяемыми из системы уравнений (2). Отношения сопротивлений R/R_i задают значения модулей этих коэффициентов. Сопротивления R_i реализуются с помощью цифровых потенциометров $R0 - R3$, управляемых кодопреобразователем DC . Напряжение с входа функционального ЦАП U_{REF} участвует в формировании постоянной составляющей d_i . Необходимость изменения значений сопротивлений $R0 - R3$ вызвана зависимостью коэффициентов полинома от номера интервала i .

Суммирование происходит в два этапа. На операционном усилителе $DA2$ суммируются напряжения, требующие изменения полярности. Затем на операционном усилителе $DA1$ происходит формирование выходного гармонического сигнала U_{OUT} . Т.к. знак коэффициентов a_i, b_i, c_i, d_i в общем случае изменяется при переходе от одного участка i к другому, в схеме требуются ключи, меняющие путь прохождения сигнала с выхода ЦАП – через усилитель $DA1$ или усилитель $DA2$. При аппроксимации гармонических функций $\sin(x)$ и $\cos(x)$ в интервале $[0; \pi/2]$ полярность коэффициентов не зависит от участка i , что позволяет обойтись без переключателей перед операционными усилителями.

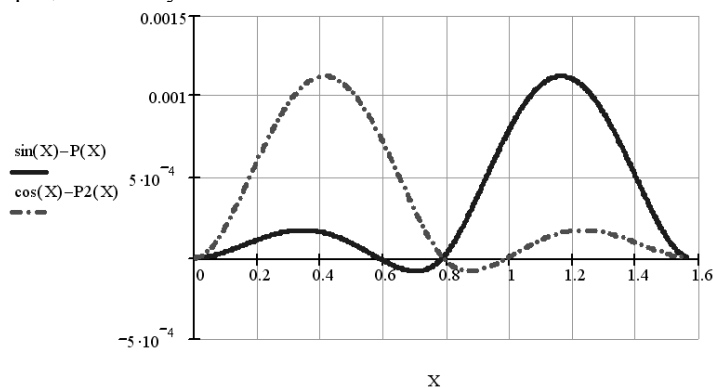


Рис. 2 – Методическая погрешность аппроксимации функциональных зависимостей $\sin(x)$ и $\cos(x)$ в интервале $[0; \pi/2]$ при $n = 2$

Погрешность аппроксимации распределяется по всему интервалу неравномерно. Для функции $\sin(x)$, имеющей вблизи нулевой точки зависимость, близкую к линейной, погрешность возрастает при отдалении от точки $x = 0$. Наибольший интерес представляет максимальная погрешность, получаемая при аппроксимации последнего интервала зависимости $\sin(x)$.

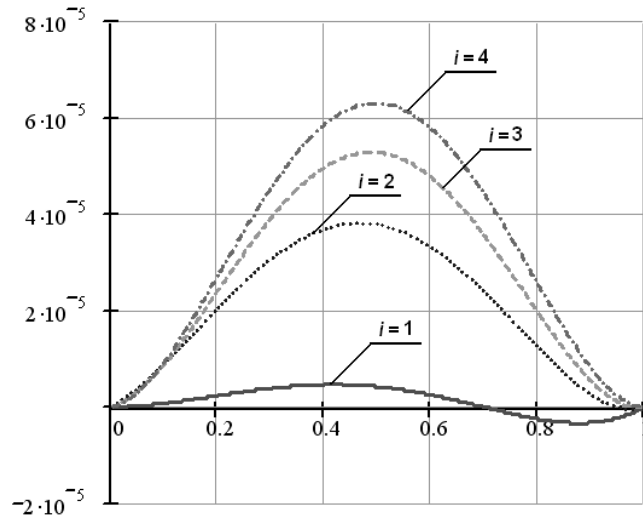


Рис. 3 – Методическая погрешность воспроизведения функциональной зависимости $\sin(x)$ на различных участках разбиения при $n = 4$

Итоговая методическая погрешность воспроизведения функций $\sin(x)$ и $\cos(x)$ зависит от числа интервалов, на которые делится отрезок $[0; \pi/2]$. Эта зависимость в сравнении с погрешностью других методов получения функциональных ЦАП приведена в таблице. Моделирование работы калибратора фазы, построенного с помощью рассмотренного ЦАП, показывает, что он обладает меньшей погрешностью в сравнении с методами Чебышева и Тейлора при небольшом (до 4-х включительно) количестве интервалов.

Таблица – Методическая погрешность ФЦАП, реализованных разными способами

Число интервалов, n	$\delta U_{OUT}, \%$					
	1	2	3	4	5	6
метод Тейлора	–	>1	1	0,6	0,06	0,002
метод Чебышева	–	>1	0,2	0,01	0,001	0,0003
линейная интерполяция	–	>1	0,2	0,01	0,001	0,0002
сплайновая аппроксимация	1,1	0,11	0,02	0,0063	0,0026	0,0012

Методическая погрешность воспроизведения заданной функции и нестабильность выходного напряжения обусловлены использованием приближенных равенств (2), (3). Уменьшить погрешность можно путем оптимального подбора коэффициентов полиномов $S_i(x)$.

Литература

1. Сапельников В.М., Кравченко С.А., Чмых М.К. Проблемы воспроизведения смещаемых во времени электрических сигналов и их метрологическое обеспечение / Изд-е Башкирск. гос. ун-та. – Уфа, 2000. - 196 с.
2. Сапельников В.М., Хакимов Р.А., Коловертнов Г.Ю., Шабанов М.А., Газизов А.А. Функциональный цифроаналоговый преобразователь в широкополосном цифруправляемом калибраторе фазы // Приборы и техника эксперимента, 2005. - № 4. – С. 43-46.

NEW METHOD OF CONSTRUCTION FUNCTIONAL DAC

Gazizov A.¹, Khakimov R.², Maksutov A.², Sapelnikov V.¹

¹ Bashkir state agrarian university

² Bashkir state university

Digital-to-analog converters (DAC) are applied to transform signals in informational-measuring techniques, radio engineering and instrument making. However existing DACs can carry out only linear transformation $U_{OUT} = N \cdot U_{REF}$ (where N – a digital code). At the same time in various areas of techniques, it is necessary to reproduce non-linear dependences with high accuracy. Functional DACs (FDAC) are based on linear DACs [1]. Nonlinear functional dependences are realized by various methods of approximation. In this work, authors for the first time have applied spline approximation to construction a FDAC.

The method of spline approximation consists in splitting a site of a definition range into intervals, in each of which function is replaced with a third degree multinomial. The group of the connected cubic multinomials, which the first and second derivatives in points of interface are continuous, refers to as a cubic spline:

$$S_i(x) = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i, \tag{1}$$

where i – number of an interval, $i = 1..n$; n – number of intervals.

On conditions of construction a spline the system of the equations is made. Decision of this system allows to determine factors a_i, b_i, c_i, d_i .

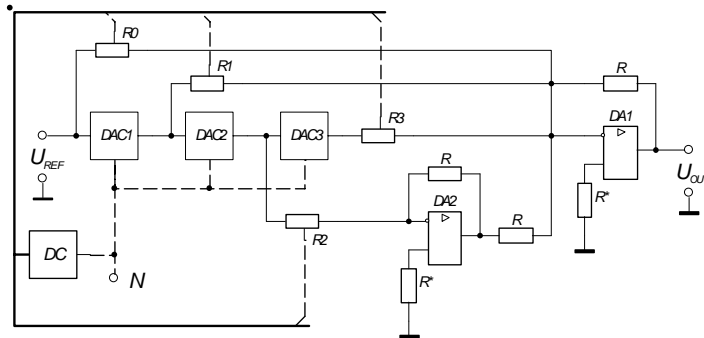


Fig. 1 – The block diagram of functional DAC

On Figure 1 the block diagram of FDAC, realizing a method of spline approximation, is resulted. The basis of this circuit is made with a chain of three in cascade included linear DACs. Their property of multiplication an analog voltage and a digital code are used for reception of sedate dependence of a voltage from a code [1]. On outputs of digital-to-analog converters $DAC1 - DAC3$ we receive voltages: $-xU_{REF}, x^2 U_{REF}, -x^3 U_{REF}$. So target voltages of $DAC1 - DAC3$ model composed polynomial (1).

On operational amplifiers $DA1$ and $DA2$ with the corresponding factors, determined from system of the equations, are summarized output voltages of DACs. On operational amplifier $DA2$ are summarized the voltages demanding change of polarity. Attitudes of resistance R/R_i set modules of these factors. Resistances R_i are realized on the digital potentiometers controlled by code converter DC . Necessity of change the values of resistance $R0 - R3$ is caused by dependence of polynom factors on number of an interval i .

The methodical error of reproduction functions $\sin(x)$ and $\cos(x)$ depends on number of intervals n . At $n = 2$ $\delta U_{\text{былх}} = 0,11\%$, at $n = 3$ $\delta U_{\text{былх}} = 0,02\%$, at $n = 4$ $\delta U_{\text{былх}} = 0,0063\%$. Modeling of the phase calibrator constructed with help of the considered DAC, shows, that it possesses a smaller error at the same quantity of intervals in comparison with Chebyshev and Taylor methods.

References

1. Sapelnikov, V.M., Kravchenko, S.A., and Chmykh, M.K., *Problemy vosproizvedeniya smeshchaemykh vo vremeni elektricheskikh signalov i ikh metrologicheskoe obespechenie* (Problems of Reproducing Time-Shifted Electrical Signals and Their Metrological Provision) Ufa: Bashkirsk. Gos. Univ., 2000.
2. Sapel'nikov, V.M., Khakimov, R.A., Kolovertnov, G.Yu., Shabanov, M.A., Gazizov, A.A., A Functional Digital-to-Analog Converter in a Broadband Phase Calibrator Controlled by a Numerical Code // *Instruments and Experimental Techniques*, 2005. - № 5, - pp. 460 - 463.

