

Цифровая обработка многомерных сигналов

ВЫБОР МНОГОМЕРНОЙ НЕРАЗДЕЛИМОЙ МАТРИЦЫ ДЕЦИМАЦИИ ДЛЯ МНОГОСКОРОСТНЫХ СИСТЕМ

Чобану М.К.

Московский энергетический институт (технический университет)

В состав многоскоростной системы обработки сигналов входят дециматоры (в банке анализа) и интерполяторы (в банке синтеза). В данной работе речь пойдет о матрицах децимации. Все понятия и теоретические выкладки, касающиеся интерполяторов в банке синтеза, могут быть получены аналогично, учитывая при этом, что интерполяция является обратной операцией по отношению к децимации.

После проведения фильтрации исходного сигнала (изображения) требуется произвести децимацию результата фильтрации. Операция децимации – это уменьшение количества отсчетов в исходном сигнале в заданное число раз. Математической реализацией децимации является так называемая матрица децимации, которая и определяет тип и способ децимации. Обозначим матрицу децимации через M . Размерность матрицы совпадает с числом переменных сигнала. Ее определитель - $\det M$ - это отношение частоты следования отсчетов исходного и прорецимированного сигналов. Число каналов для полностью прорецимированных сигналов определяется абсолютным значением определителя матрицы децимации $m = |\det M|$. Элементы матрицы децимации M должны быть целыми числами.

Пусть строка $[n_1 \ n_2]$ – это координаты отсчетов исходного сигнала. Для получения координат отсчетов, которые останутся после децимации исходного сигнала, нужно умножить эту строку координат на матрицу децимации. В двумерном разделимом (сепарабельном) случае матрица децимации имеет диагональный вид,

например $M = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. Такую децимацию называют прямоугольной, так как получающиеся в результате

разложения сигнала субполосы имеют прямоугольную (квадратную) форму (см. Рис.1).

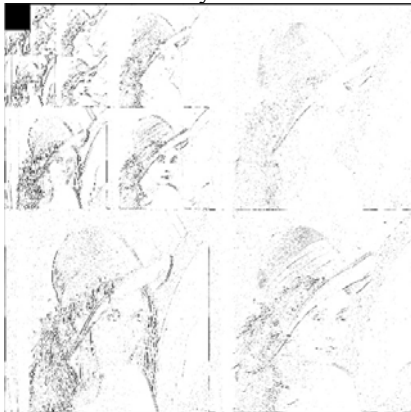


Рис. 1. Субполосы сигнала после фильтрации при разделимой матрице децимации.

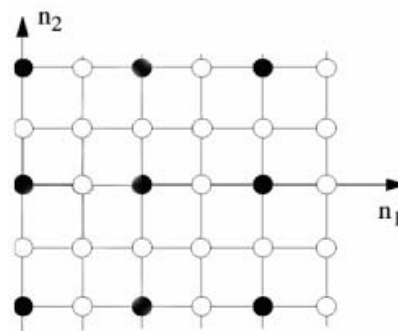


Рис 2. Черным обозначены отсчеты, остающиеся после децимации.

В данном случае число каналов разделимого БФ равно $|\det M| = 4$. Координаты отсчетов сигнала, которые остаются после проведения прямоугольной децимации, равны $[n_1 \ n_2] \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = [2n_1 \ 2n_2]$. Результат прямоугольной децимации показан на Рис.2. Для неразделимой децимации одним из вариантов матрицы деци-

мации может быть «шахматная» матрица децимации [1,2]: $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. Число каналов в этом случае равно $|\det M| = 2$. Координаты отсчетов сигнала, которые остаются после проведения шахматной децимации - $[n_1 \ n_2] \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = [n_1+n_2 \ n_1-n_2]$ Поэтому выборка отсчетов происходит в шахматном порядке (см. Рис.3). Полу-

чающиеся в результате неразделимой фильтрации и последующей неразделимой шахматной децимации субполосы на нечетных уровнях разложения имеют ромбовидную форму, на четных уровнях - прямоугольную (квадратную) форму. Это связано с тем, что выполняется равенство $M^2 = 2 \cdot I$, где I - единичная матрица.

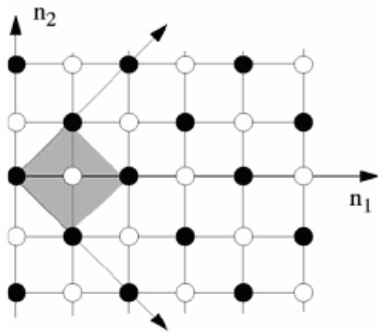


Рис. 3. Шахматная решетка. Разделение отсчетов сигнала.



Рис. 4. Результат неразделимой децимации и фильтрации.

Субполоса, имеющая форму ромба, может быть преобразована в прямоугольник. За счет уменьшения числа отсчетов в 2 раза, изображение в субполосе исказится – оно будет «сплюснуто» по горизонтали (см. Рис.4). Поэтому на нечетных уровнях разложения наблюдается некоторое геометрическое искажение субполосы, однако для иерархического алгоритма сжатия [3] это не имеет принципиального значения.

В случае обработки изображений, применение неразделимых фильтров для фильтрации и последующей шахматной децимации является более естественным и предпочтительным, т.к. изображение по своей природе является неразделимым двумерным (2-D) сигналом. Поэтому вполне естественно было бы использовать для его фильтрации неразделимые 2-D банки фильтров.

Неразделимые банки фильтров имеют лучшие характеристики, чем их разделимые аналоги (представляющие собой произведение одномерных банков фильтров по каждому из измерений). Число степеней свободы у неразделимых БФ также намного больше, а значит больше и возможностей для оптимизации.

Наряду с задачами сжатия ММ сигналов известны многие другие области удачного и предпочтительно-го применения неразделимых банков фильтров.

В томографии двумерные разделимые вейвлеты, которые строятся на основе разделимых БФ, задают прямоугольное деление частотной плоскости, что не всегда является подходящим при предположении о радиальных полосах частот в изображениях [4].

Применение неразделимого мультиразрешения в томографии в двумерном случае позволяет учитывать геометрию системы путем ромбовидного деления частотной плоскости, что более подходит для случая радиальных полос частот сигнала. Местная томография, использующая неразделимые базисы показала существенное увеличение пикового отношения сигнал/шум (PSNR). Другим успешным применением неразделимых вейвлетов является их использование в 3-D вращательной ангиографии [5].

В некоторых случаях, желательно использовать неразделимую децимацию, чтобы получить полезные 2-D вейвлет-представления. Например, неразделимые ортонормальные вейвлет базисы могут использоваться для распознавания текстур и фрактального анализа [6]. Выбор неразделимых фильтров для разложения имеет существенное влияние на результат характеристики текстуры. В [7,8] показано, что неразделимые вейвлеты инвариантны к вращению изображения текстуры. Именно поэтому классификация и результаты сегментации лучше при использовании неразделимых симметричных вейвлетов.

Считается, что одним из главных недостатков неразделимой фильтрации является ее высокая вычислительная сложность. В наших исследованиях, а также в [9] показано, что вообще-то это не соответствует действительности. В реальности сложность вычисления зависит от многих факторов. Среди прочих можно упомянуть размер сигнала, который требуется обработать, носитель вейвлета (размер КИХ фильтра), архитектура вычислительной системы и другие. Например, при сравнении на многопроцессорных системах алгоритмов на основе свертки для различных распределений, разделимые вейвлет фильтры оказались наиболее эффективны для распределения блоков при малых значениях фильтра (с размером L). Но для неразделимых фильтров, распределение блоков более эффективно, если размер изображения n оказывается большим (при реальных значениях L). Важно отметить, что результаты в [9] (полученные для Intel Paragon) зависят от параметров архитектуры. Наблюдается значительное влияние параметров архитектуры (например, отношения скорости вычислений к скорости передачи данных) на относительную производительность алгоритмов.

Алгоритм на основе свертки, использующий распределение блоков, работает быстрее, чем алгоритмы, использующие распределение строк, также как и в случае разделимых вейвлет фильтров. Однако, в отличие от разделимого случая, с увеличением размера носителя вейвлета время выполнения алгоритмов на основе свертки растет быстрее, чем время выполнения для БПФ-алгоритмов. Например, относительно большое время запуска для передачи сообщения на Intel Paragon (40-45 мсек) неблагоприятно влияет на характеристики операции транспонирования матрицы, требуемой для разделимых 2-D дискретных вейвлет алгоритмов, использующих распределение строк. Результаты могут быть различны для машины с очень низким

временем запуска сообщения.

В области телевидения высокой четкости, при преобразовании между прогрессивным и чересстрочным видео, при оценке параметра движения широко используются трехмерные неразделимые фильтры [10]. Использование трехмерной согласованной фильтрации приводит к неразделимым фильтрам, которые дают самое большое улучшение SNR среди всех линейных фильтров, в случае, когда пространственные характеристики объекта известны.

Что касается БИХ фильтров, то в [11] отмечено, что необходимо использовать широко известные преимущества частотных характеристик неразделимых БИХ фильтров. Их другим преимуществом является их низкая вычислительная сложность.

Начиная с известной работы [12] задача синтеза М-D многоскоростных систем в течение последних 15 лет рассматривалась весьма часто. Существуют различные методы синтеза для случая, когда матрица децимации известна. Очевидно, что ключевым блоком для построения М-D многоскоростных систем является матрица децимации. До настоящего времени на рассмотрении был только случай, когда эта матрица известна. Одной из основных задач при синтезе М-D многоскоростной системы является наличие процедуры создания матрицы децимации с заданными свойствами - они называются допустимыми матрицами децимации.

Задача анализа воздействия известной матрицы децимации на свойства многоскоростной системы была решена во многих работах и статьях - [13, 14] наиболее известны из них. В [13] рассматривается случай, когда матрица децимации и матрицы расширения различны, и для диагонализации матрицы децимации используется форма Смита. Концепции взаимной простоты, левого (правого) наибольшего общего делителя, описания матрицы через дроби - применяются к целочисленной матрице из-за того, что ее элементы (целые числа) из принципиально идеальной области. Все эти понятия помогают реализовать М-D систему с заданными матрицами децимации/расширения. В [14] для анализа М-D банков фильтров используется алгебраическая групповая теория.

Требования к матрицам децимации:

1. Матричные элементы должны быть целыми числами (только этот случай рассматривается в этой статье).

2. Число каналов определяется абсолютным значением определителя матрицы децимации $m = |\det M|$.

3. Убедиться, что в каждом направлении, в котором происходит расширение, собственные значения матрицы M должны быть больше единицы [15].

4. С точки зрения реализации также необходимо иметь возможность получить разделимую децимацию после нескольких итеративных шагов. Это тот самый случай, когда процедуры так называемой "неразделимой через разделимую" фильтрации выполняются как в [16] и в некоторых других случаях. В этой статье показано, что это требование означает то, что матрица децимации M должна быть n -м квадратом матрицы идентичности, умноженной на скаляр $M^n = I_k$ для небольших значений n , k - количество измерений, I - матрица идентичности.

До настоящего момента не было никакого систематического подхода, который позволил бы построить неразделимую матрицу децимации для заданного числа измерений и числа каналов. До сих пор было только упомянуто, что абсолютные значения собственных значений матрицы децимации должны быть больше единицы. В [17] приведен способ определения всех возможных матриц децимации и их собственных значений для данного в задаче количества каналов и измерений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Чобану М.К. Многомерные многоскоростные системы и многомерные вейвлет-функции. Часть 1. Теория, // Вестник МЭИ, 2003. №2, стр. 75-82
2. Чобану М.К. Многомерные многоскоростные системы и многомерные вейвлет-функции. Часть 2. Синтез, // Вестник МЭИ, 2003. №3, стр. 69-78
3. Черников А., Чобану М. Современный метод сжатия изображений на базе вейвлет-преобразования и иерархического алгоритма кодирования. // Цифровая обработка сигналов, 2005, 2(16), сс. 40-49.
4. S. Bonnet, F. Peyrin, F. Turjman, and R. Prost. Tomographic reconstruction using nonseparable wavelets // IEEE Trans. Image Proc., vol. 9, no. 8, pp. 1445-1450, August 2000.
5. S. Bonnet, F. Peyrin, F. Turjman, and R. Prost. Nonseparable wavelet-based conebeam reconstruction in 3-D rotational angiography // IEEE Trans. Medical Imaging, vol. 22, no. 3, pp. 360-367, March 2003.
6. Y. Meyer, Ondelettes et fonctions splines, Sem. Equations aux Derivees Partielles edition, Dec. 1986.
7. J.-W. Wang, C.-H. Chen, and J.-S. Pan. Genetic feature selection for texture classification using 2-D non-separable wavelet bases // IEICE Trans. Fundament., vol. E81-A, no. 8, pp. 1635-1644, 1998.
8. J.-S. Pan and J.-W. Wang. Texture segmentation using separable and non-separable wavelet frames // IEICE Trans. Fundament., vol. E82-A, no. 8, pp. 1463-1674, 1999.
9. J. Patel, A. Khokhar, and L. Jamieson. Scalability of 2-D wavelet transform algorithms: Analytical and experimental results on MPPs // IEEE Trans. Signal Proc., vol. 48, no. 12, pp. 3407-3419, December 2000.
10. F. Mujica, J.-P. Leduc, R. Murenzi, and M. Smith. A new motion parameter estimation algorithm based on the continuous wavelet transform // IEEE Trans. Image Proc., vol. 9, no. 5, pp. 873-888, May 2000.

11. S. Basu. Multidimensional causal, stable, perfect reconstruction filter banks // IEEE Trans. Circ., Syst. I: Fundamental Theory and Applications, vol. 49, no. 6, pp. 832-842, June 2002.
12. E. Viscito and J. Allebach. The analysis and design of multidimensional FIR perfect reconstruction filter banks with arbitrary sampling lattices // IEEE Trans. Circ. and Syst., vol. 38, no. 1, pp. 29-41, Jan. 1991.
13. T. Chen and P. P. Vaidyanathan. Recent developments in multidimensional multirate systems // IEEE Trans. Circ., Syst. for Video Technol., vol. 3, no. 2, pp. 116-137, Apr. 1993.
14. A. Kalker and I. Shah. Group theoretic approach to multidimensional filter banks // IEEE Trans. Signal Proc., vol. 44, no. 6, pp. 1396-1405, June 1996.
15. A. Cohen and I. Daubechies. Non-separable bidimensional wavelet bases // Revista Matem. Iberoamericana, vol. 9, no. 1, pp. 51-137, 1993.
16. O. Bolshakova. Synthesis of four-dimensional filter banks by application of Bernstein polynomials," in Proc. Fifth Intern. Conf. and Exhib. - Digit. Sign. Proc. and its Applic. - DSPA-2003, Moscow, 2003, MPEI, vol. 1, p. 278.
17. Tchobanou M. Parameterization of Multidimensional Decimation Matrices. The 2005 International Workshop on Spectral Methods and Multirate Signal Processing, SMMSPP 2005 - Riga, Latvia, 2005, pp. 7-10.

CHOICE OF MULTIDIMENSIONAL NONSEPARABLE DECIMATION MATRIX FOR MULTIRATE SYSTEMS

Tchobanou M.

Moscow Power Engineering Institute (Technical University)

The growing demand for processing and compression of still two-dimensional (2-D) images and video signals in telecommunications and multimedia technology motivates the fact that increasingly more attention is being paid to multi-dimensional (M-D) digital systems. As usual the transformation part of the encoding system is performed by some multirate systems. The main interest in this paper is connected with so-called true M-D systems, namely with nonseparable multirate systems. Multirate systems consist of M-D digital filters, decimators, interpolators and delay elements. They form analysis and synthesis filter banks (FB). The decimation/interpolation processes are implemented by use of some tools. The decimation matrix plays a very important role in it. The requirements that the decimation matrix should meet are known. But till nowadays the way to build these decimation matrices and a parameterization of them are still unknown. This paper gives an answer to these questions.

Nonseparable decimation matrices and FBs are preferable because M-D signals by their nature are nonseparable. Nonseparable FBs have better characteristics than their separable counterparts (which consist of products of 1-D FBs along each dimension). The number of degrees of freedom is also much bigger for nonseparable FBs. In tomography the 2-D separable wavelets impose a rectangular tiling of the frequency plane, which is not well suited to the radial band-limited assumption of the image. Nonseparable wavelet orthonormal bases can be used for texture discrimination and fractal analysis. It is supposed that one of the main drawbacks of nonseparable filtration is its high computational complexity. In [1] it is shown that in general this is not true. The real complexity highly depends on many factors. Among some of them one should mention the size of the signal to be processed, the support of the wavelets (the size of FIR filter), the architecture of computing system and others. In high-definition television applications, in conversion between progressive and interlaced video, in motion parameter estimation, 3-D nonseparable filters are widely used.

Beginning from the famous work [2] the task of M-D multirate system design was considered quite often during last 15 years. Different design procedures were given for the case when the decimation matrix is known. As it is clear the key building block in M-D multirate systems is the decimation matrix. Till now under consideration there was only the case when this matrix is given. The most general task of M-D multirate system design requires to have a procedure for generating decimation matrices with given properties. In what follows they are called admissible decimation matrices.

Up to now there was not any systematic approach that allowed to build nonseparable decimation matrices for given dimension and given number of channels. In [3] follows such an approach is given. Until now there was mentioned only that the eigenvalues of decimation matrix should have their absolute values bigger than one.

References

1. J. Patel, A. Khokhar, and L. Jamieson. Scalability of 2-D wavelet transform algorithms: Analytical and experimental results on MPPs // IEEE Trans. Signal Proc., vol. 48, no. 12, pp. 3407-3419, December 2000.
2. E. Viscito and J. Allebach. The analysis and design of multidimensional FIR perfect reconstruction filter banks with arbitrary sampling lattices // IEEE Trans. Circ. and Syst., vol. 38, no. 1, pp. 29-41, Jan. 1991.
3. Tchobanou M. Parameterization of Multidimensional Decimation Matrices. The 2005 International Workshop on Spectral Methods and Multirate Signal Processing, SMMSPP 2005 - Riga, Latvia, 2005, pp. 7-10.