

# МОДЕЛИРОВАНИЕ МНОГОМЕРНЫХ МНОГОЗНАЧНЫХ ЦЕПЕЙ МАРКОВА

Петров Е.П., Трубин И.С., Харина Н.Л.

Вятский государственный университет, кафедра радиоэлектронных средств

610000, г. Киров, ул. Московская, 36,

тел. (833-2)-357259, факс (833-2)-626578, e-mail: [res@riac.ru](mailto:res@riac.ru)

Многомерные случайные процессы при их цифровом представлении  $g$ -разрядными двоичными числами, становятся также многоуровневыми, принимающими  $2^g$  дискретных значений. Для разработки и исследования алгоритмов фильтрации таких процессов необходимо располагать математическими моделями, адекватными реальным процессам. К ММ предъявляются два основных требования – наиболее точное соответствие модели реальным процессам и минимальные ресурсы на ее реализацию. Эти требования являются противоречивыми, так как при стремлении точно описать реальный процесс приходится усложнять ММ. В некоторых случаях компромиссным решением при построении ММ многомерного многоуровневого случайного процесса является использование многомерного дискретнозначного марковского процесса, т.е. процесса, для которого некоторая статистика значения элемента этого процесса условная по значениям других элементов процесса, зависит только от значений тех из этих элементов, которые располагаются в непосредственной близости от рассматриваемого элемента.

Предположим, что фильтрация многомерного дискретнозначного марковского процесса осуществляется сразу после получения его из канала связи, в этом случае, отталкиваясь от каузально расположенного множества ранее принятых значений этого процесса, наибольший эффект может быть достигнут при рекурсивной нелинейной фильтрации. Поэтому в качестве ММ многомерного многозначного случайного процесса возьмем многомерную многозначную цепь Маркова на несимметричном многомерном пространстве.

Пусть  $\mu(\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_q)$ , где  $\Theta_i$  - дискретные координаты, многомерный многоуровневый дискретнозначный марковский процесс. При построении математической модели такого процесса, будем считать, что  $\mu(\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_q)$  представляет собой суперпозицию  $q$  одномерных дискретнозначных марковских процессов (цепей Маркова) с несколькими значениями.

Для демонстрации метода построения многомерной ММ ограничимся построением ММ четырехмерного марковского дискретнозначного процесса, представляющего собой, две статистически связанные видеопоследовательности цифровых полутоновых изображений, разнесенные в пространстве.

## МОДЕЛЬ ЧЕТЫРЕХМЕРНОГО МНОГОЗНАЧНОГО СЛУЧАЙНОГО МАРКОВСКОГО ПРОЦЕССА

Представление цифрового полутонового изображения набором из  $g$  двоичных сечений [1] сводит задачу построения четырехмерной пространственно-временной математической модели (ПВММ) к построению ПВММ двоичных сечений, которая представляет собой однородную четырехмерную цепь Маркова с двумя равновероятными значениями  $M_1, M_2$  и матрицами вероятностей переходов от одного значения к другому внутри кадра ( ${}^1\Pi, {}^2\Pi$ ), от кадра к кадру ( ${}^4\Pi$ ) и от позиции к позиции ( ${}^8\Pi$ ), соответственно:

$${}^1\Pi = \begin{vmatrix} {}^1\pi_{11} & {}^1\pi_{12} \\ {}^1\pi_{21} & {}^1\pi_{22} \end{vmatrix}, \quad {}^2\Pi = \begin{vmatrix} {}^2\pi_{11} & {}^2\pi_{12} \\ {}^2\pi_{21} & {}^2\pi_{22} \end{vmatrix}, \quad {}^4\Pi = \begin{vmatrix} {}^4\pi_{11} & {}^4\pi_{12} \\ {}^4\pi_{21} & {}^4\pi_{22} \end{vmatrix}, \quad {}^8\Pi = \begin{vmatrix} {}^8\pi_{11} & {}^8\pi_{12} \\ {}^8\pi_{21} & {}^8\pi_{22} \end{vmatrix}.$$

Пусть случайный процесс в позиции  $d$  представляет собой четырехмерный двоичный марковский процесс  $\mu = \mu_{ijkl}$  с двумя пространственными координатами  $i, j$  ( $i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}$ ), третьей – временной  $k = \overline{1, 2, \dots}$  - номер кадра и четвертой – позиционной. Процесс  $\mu_{ijkl}$  является процессом одного двоичного сечения  $g$ -разрядного процесса и представляет собой суперпозицию четырех одномерных двоичных марковских процессов.

Рассмотрим моделирование двоичного элемента изображения  $v_4 = \mu_{ijkl}$  в  $k$ -м кадре в позиции  $d$ , принадлежащий области, начинающейся со второй строки ( $i = 2$ ) и второго столбца ( $j = 2$ ) каждого кадра в позиции  $d$ . Моделирование элементов изображения, принадлежащих другим областям проще, чем указанной области и сводится к моделированию одномерных, двумерных и трехмерных стационарных цепей Маркова [2,3].

Будем считать, что значение элемента изображения  $v_4$  зависит лишь от соседних с  $v_4$  элементов, объединенных в окрестность  $\Lambda_{ijkl}$ , состоящую из 15 элементов

$$\Lambda_{i,j,k,v} = (v_1, v_2, v_3, v'_1, v'_2, v'_3, v'_4, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \varepsilon'_3, \varepsilon'_4). \quad (1)$$

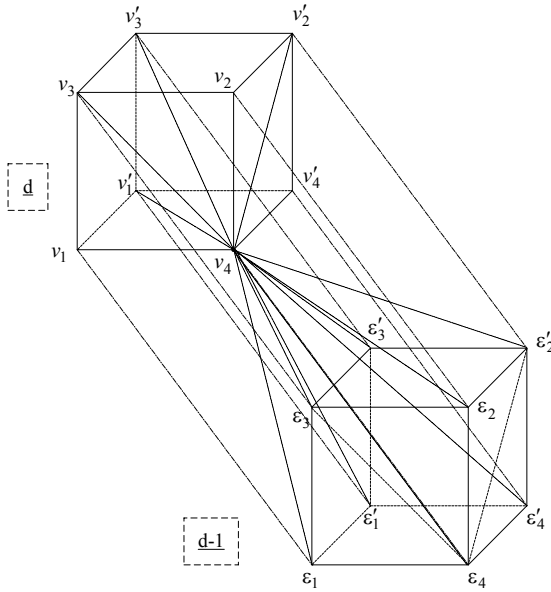


Рис. 1

На рис. 1 представлен фрагмент ММ четырехмерного дискретного марковского процесса для двух соседних кадров и двух соседних позиций в пространстве, начиная со второй строки и второго столбца каждого кадра в позиции  $d$ .

Обозначим через  $v_i, v'_i$  элементы изображения в позиции  $d$ , а элементы в позиции  $d-1$  через  $\varepsilon_i$  и  $\varepsilon'_i$  ( $i = \overline{1,4}$ ).

В основу метода построения модели положен информационный подход, в соответствии с которым вероятность принятия элементом  $v_4$  одного из двух значений  $M_1$  или  $M_2$  определяется статистической зависимостью элемента  $v_4$  и элементов окрестности  $\Lambda_{ijkl}$ .

Моделируемый процесс является четырехмерной цепью Маркова, поэтому количество информации, определяющее появление того или иного значения

элемента изображения  $v_4$ , должно зависеть лишь от статистических связей его с элементами  $v_1, v_2, v'_4, \varepsilon_4$  окрестности (1).

$$\begin{aligned} I(v_1, v_2, v'_4, v_4, \varepsilon_4) &= \log \frac{w(v_4 | v_1, v_2, v_3, v'_1, v'_2, v'_3, v'_4, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \varepsilon'_3, \varepsilon'_4)}{w(v_4 | v_3, v'_1, v'_2, v'_3, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \varepsilon'_3, \varepsilon'_4)} = \\ &= \log \frac{w(v_4 | v_1)w(v_4 | v_2)w(v_4 | v'_4)w(v_4 | \varepsilon_4)w(v_4 | \varepsilon'_1)w(v_4 | \varepsilon_3)}{w(v_4 | v_3)w(v_4 | v'_1)w(v_4 | v'_2)w(v_4 | \varepsilon_1)} \times \\ &\quad \times \frac{w(v_4 | \varepsilon'_2)w(v_4 | v'_3)}{w(v_4 | \varepsilon_2)w(v_4 | \varepsilon'_4)w(v_4 | \varepsilon'_3)}, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $w(\cdot)$  - многомерные и одномерные одношаговые плотности вероятностей перехода в сложных и простых цепях Маркова, соответственно.

Вероятности переходов для четырехмерного двоичного марковского процесса могут быть представлены в виде:

$$\begin{aligned} \pi_{ijklmnrtsfhuvpw} &= \pi(v_4 | v_1 = M_j; v_2 = M_k; v_3 = M_l; v'_4 = M_n; v'_3 = M_r; \\ \varepsilon_1 &= M_t; \varepsilon_2 = M_s; \varepsilon_3 = M_f; \varepsilon_4 = M_h; \varepsilon'_1 = M_u; \varepsilon'_2 = M_v; \varepsilon'_3 = M_p; \varepsilon'_4 = M_w), \\ i, j, k, l, m, n, q, r, t, s, f, h, u, v, p, w &= \overline{1,2}. \end{aligned}$$

Если априорно известны матрицы вероятностей переходов по четырем координатам - матрицы  ${}^1\Pi, {}^2\Pi, {}^4\Pi$  для трехмерного марковского процесса в позиции  $d$  и аналогичные матрицы вероятностей переходов  ${}^1\Pi', {}^2\Pi', {}^4\Pi'$  для трехмерного марковского процесса в позиции  $d-1$  и матрица вероятностей переходов  ${}^8\Pi$ , статистически связывающая трехмерные процессы в позициях  $d-1$  и  $d$ , то для работы модели необходимо предварительно вычислить вспомогательные матрицы:

$$\begin{aligned} {}^3\Pi &= {}^1\Pi' \times {}^2\Pi', \quad {}^3\Pi' = {}^1\Pi' \times {}^2\Pi', \quad {}^5\Pi = {}^1\Pi' \times {}^4\Pi', \quad {}^5\Pi' = {}^1\Pi' \times {}^4\Pi', \quad {}^6\Pi = {}^2\Pi' \times {}^4\Pi', \quad {}^6\Pi' = {}^2\Pi' \times {}^4\Pi', \quad {}^7\Pi = {}^3\Pi' \times {}^5\Pi', \quad {}^7\Pi' = {}^3\Pi' \times {}^5\Pi', \quad {}^9\Pi' = {}^3\Pi' \times {}^8\Pi, \\ {}^{10}\Pi &= {}^5\Pi' \times {}^8\Pi, \quad {}^{11}\Pi = {}^6\Pi' \times {}^8\Pi, \quad {}^{12}\Pi = {}^7\Pi' \times {}^8\Pi, \quad {}^{13}\Pi' = {}^1\Pi' \times {}^8\Pi, \quad {}^{14}\Pi = {}^2\Pi' \times {}^8\Pi, \quad {}^{15}\Pi = {}^4\Pi' \times {}^8\Pi. \end{aligned} \quad (3)$$

Вероятности появления элемента изображения  $v_4$  со значением  $v_4 = M_1$  или  $v_4 = M_2$  зависят от комбинаций значений элементов изображений, входящих в окрестность (1). Эти вероятности образуют матрицу  $\Pi$  размером  $2 \times 32$ , удовлетворяющую условию нормировки.

Значения элементов матрицы  $\Pi$  могут быть вычислены в соответствии с (2). Выражения для вычисления элементов первых двух строк матрицы  $\Pi$  имеют вид

$$\pi_{ii \dots i}^{15} = 1 - \frac{{}^1\pi_{ij} \cdot {}^2\pi_{ij} \cdot {}^4\pi_{ij} \cdot {}^8\pi_{ij} \cdot {}^7\pi_{ij} \cdot {}^9\pi'_{ij} \cdot {}^{10}\pi'_{ij} \cdot {}^{11}\pi'_{ij}}{3 \pi_{ii} \cdot {}^5\pi_{ii} \cdot {}^6\pi_{ii} \cdot {}^{13}\pi'_{ii} \cdot {}^{14}\pi'_{ii} \cdot {}^{15}\pi'_{ii} \cdot {}^{12}\pi'_{ii}}; \quad \pi_{ij \dots i}^{14} = 1 - \frac{{}^1\pi_{ii} \cdot {}^2\pi_{ij} \cdot {}^4\pi_{ij} \cdot {}^8\pi_{ii} \cdot {}^7\pi_{ij} \cdot {}^9\pi'_{ij} \cdot {}^{10}\pi'_{ij} \cdot {}^{11}\pi'_{ij}}{3 \pi_{ij} \cdot {}^5\pi_{ij} \cdot {}^6\pi_{ii} \cdot {}^{13}\pi'_{ij} \cdot {}^{14}\pi'_{ij} \cdot {}^{15}\pi'_{ii} \cdot {}^{12}\pi'_{ii}}. \quad (4)$$

Остальные элементы вычисляются в зависимости от комбинации значений элементов окрестности  $\Lambda_{ijkd}$ . В матрице  $\Pi$  элементы строк с 1 по 16 равны элементам строк с 17 по 32.

Алгоритм работы ПВММ состоит из следующих этапов:

1. Задаются размер изображения  $m \times n$  элементов, матрицы переходов  ${}^1\Pi, {}^2\Pi, {}^4\Pi, {}^8\Pi$  и вычисляются матрицы  ${}^3\Pi, {}^5\Pi, {}^6\Pi, {}^7\Pi, {}^9\Pi, \dots, {}^{15}\Pi$  и  $\Pi$ ;

2. Берется случайное число  $\xi_l (l \leq m \cdot n)$   $m \cdot n$  - размер изображения, равномерно распределенное на интервале  $[0,1]$ ;

3. Из первого столбца матрицы  $\Pi'$  выбирается элемент  $\alpha_s (s = \overline{1,32})$ , соответствующий значениям элементов окрестности  $\Lambda_{ijk}$ ;

4. Число  $\xi_l$  сравнивается с выбранным элементом  $\alpha_s (s = \overline{1,32})$  и если  $\alpha_s (s = \overline{1,16})$  и  $\xi_l \leq \alpha_s$ , то элемент изображения  $v_4$  принимает значение  $v_4 = M_1 = 0$ , в противном случае  $v_4 = M_2 = 1$ . Если  $\alpha_s (s = \overline{17,32})$  и  $\xi_l < \alpha_s$ , то  $v_4 = M_1 = 1$ , иначе  $v_4 = M_2 = 0$ ;

5. Если  $i < n; j < m; k < K$ , где  $K$  - длина видеопоследовательности, то идти к п.3, иначе п.6;

Останов.

Из формул (4) легко получить матрицу  $\Pi$  размером  $2 \times 16$  для модели трехмерного дискретнозначного марковского процесса, элементы первой и второй строк которой будут иметь вид

$$\pi_{iiiiii} = 1 - \frac{{}^1\pi_{ij} \cdot {}^2\pi_{ij} \cdot {}^4\pi_{ij} \cdot {}^7\pi_{ij}}{3 \pi_{ii} \cdot {}^5\pi_{ii} \cdot {}^6\pi_{ii}}; \quad \pi_{ijiiii} = 1 - \frac{{}^1\pi_{ii} \cdot {}^2\pi_{ij} \cdot {}^4\pi_{ij} \cdot {}^7\pi_{ii}}{3 \pi_{ij} \cdot {}^5\pi_{ij} \cdot {}^6\pi_{ii}}$$

Для двумерной модели размер матрицы  $\Pi$  равен  $2 \times 4$ , элементы первых двух строк которой имеют

$$\text{вид} \quad \pi_{iiii} = 1 - \frac{{}^1\pi_{ij} \cdot {}^2\pi_{ij}}{3 \pi_{ii}}; \quad \pi_{ijii} = 1 - \frac{{}^1\pi_{ii} \cdot {}^2\pi_{ij}}{3 \pi_{ij}}$$

На рис.2 представлено двоичное двумерное искусственное изображение, соответствующее одному кадру, а на рис. 3 полутоновое изображение, состоящее из 8 двоичных плоскостей с вероятностями переходов по каждому двоичному изображению  ${}^1\pi_{ii}^{(1)} = {}^2\pi_{ii}^{(1)} = 0,5$ ,  ${}^1\pi_{ii}^{(2)} = {}^2\pi_{ii}^{(2)} = 0,55$ ,  ${}^1\pi_{ii}^{(3)} = {}^2\pi_{ii}^{(3)} = 0,6$ ,  ${}^1\pi_{ii}^{(4)} = {}^2\pi_{ii}^{(4)} = 0,7$ ,  ${}^1\pi_{ii}^{(5)} = {}^2\pi_{ii}^{(5)} = 0,8$ ,  ${}^1\pi_{ii}^{(6)} = {}^2\pi_{ii}^{(6)} = 0,85$ ,  ${}^1\pi_{ii}^{(7)} = {}^2\pi_{ii}^{(7)} = 0,9$ ,  ${}^1\pi_{ii}^{(8)} = {}^2\pi_{ii}^{(8)} = 0,95$ ..

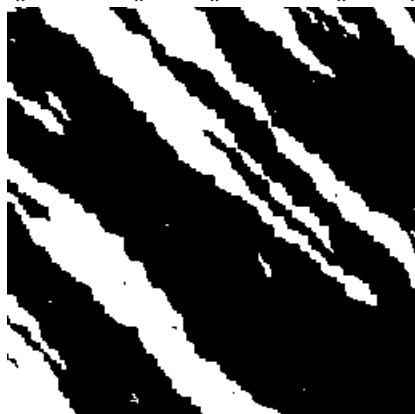


Рис. 2

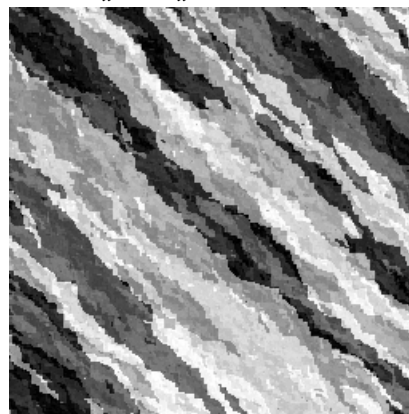


Рис. 3

Используя предложенный подход нетрудно построить модель многозначного марковского процесса более высокого порядка, чем четырехмерный.

**Литература**

1. Петров Е.П. Нелинейная цифровая фильтрация полутоновых изображений/Петров Е.П., Трубин И.С., Тихонов И.Е.// Радиотехника. 2003, № 5. – с. 7-10
2. Петров Е.П. Пространственно-временная математическая модель последовательности цифровых полутоновых изображений марковского типа/Петров Е.П., Трубин И.С., Харина Н.Л.// Проблемы обработки информации: Вестник ВНИЦ Верхне-Волжского отделения АТН РФ. - 2006. - Вып. № 1
3. Петров Е.П. Математическая модель двумерного цифрового полутонового изображения марковского типа/Петров Е.П., Трубин И.С., Харина Н.Л.// Проблемы обработки информации: Вестник ВНИЦ Верхне-Волжского отделения АТН РФ. - 2006. - Вып. № 1

**A METHOD FOR MODELING MULTIDIMENSIONAL MULTIVARIATE MARKOV CHAIN**

Petrov E., Trubin I., Kharina N.

Vyatka state university,  
610000, Kirov, street. Moscow, bld. 36, Faculty of radio-electronic tools,  
Phone (8332) 35-72-59, Fax (8332) 35-70-39, e-mail i\_trubin@mail.ru

The creation and investigation of a multidimensional random Markov process filtering algorithms require mathematical models (MMs), which must be adequate to real-life processes. When the digitized Multivariate casual processes are represented by *g-bit* binary numbers, a compromise solution is the use of multidimensional Markov processes with discrete arguments as MMs.

A multidimensional Markov process is a stochastic process in which some statistics of one element of this process, which is conditional with respect to the other elements, depends only on the immediate neighbors of this element.

If each element of multidimensional Markov processes is filtered immediately after this elements is received from a communication channel, then MM must be a random causal field, that is, a multivariate multidimensional Markov chain on asymmetrical multivariate space.

Let us represent the process  $\mu(\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_q)$ , where  $\Theta_i$  -discrete state, as a superposition of several one-dimensional multilevel discrete-valued Markov processes.

In this paper, as an example, we use two statistically connected video sequences of digitized grayscale images, carried in space.

The representation of a digital grayscale image by a set of *g* binary layers (cuts) reduces constructing an MM of the four-dimensional Markov chain to constructing an MM of the binary cuts, which is representing homogeneous four-dimensional Markov circuit with two equiprobable values  $M_1, M_2$  and matrixes of transition probabilities from one value to another inside the frame ( ${}^1\Pi, {}^2\Pi$ ), from frame to frame ( ${}^4\Pi$ ) and from the position to position ( ${}^8\Pi$ ), accordingly:

$${}^1\Pi = \begin{bmatrix} {}^1\pi_{11} & {}^1\pi_{12} \\ {}^1\pi_{21} & {}^1\pi_{22} \end{bmatrix}, \quad {}^2\Pi = \begin{bmatrix} {}^2\pi_{11} & {}^2\pi_{12} \\ {}^2\pi_{21} & {}^2\pi_{22} \end{bmatrix}, \quad {}^4\Pi = \begin{bmatrix} {}^4\pi_{11} & {}^4\pi_{12} \\ {}^4\pi_{21} & {}^4\pi_{22} \end{bmatrix}, \quad {}^8\Pi = \begin{bmatrix} {}^8\pi_{11} & {}^8\pi_{12} \\ {}^8\pi_{21} & {}^8\pi_{22} \end{bmatrix}.$$

Summing the MMs of the multilevel binary multidimensional processes, we obtain an MM of the four-dimensional multilevel Markov process with discrete arguments.

The method described in this paper makes it possible to model discrete-valued Markov random processes of arbitrary dimension.