БАЗО-БАЗИСНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ ФИЛЬТРАЦИИ И УЛЬТРАФИЛЬТРАЦИИ МНОГОМЕРНЫХ СИГНАЛОВ

Бадекин Б.И.

Московский инженерно-физический институт /государственный университет/

Определение фильтра и ультрафильтра [1] в теоретико-множественных построениях предполагает использование подмножеств как замкнутых множеств или подмножеств множеств, если данный принцип построения должен быть установлен. Трудность в сведении процедуры расширения как метризуемого процесса или аксиоматизация теории в рамках не выхода на независимое описание полумножеств ограничивает анализ и введение определений в булевой алгебре.

Рассмотрим исходное множество I. Булевая алгебра P(I) определяет произвольный фильтр над множеством I, т.е. непустое подмножество D множества P(I), при удовлетворении следующим условиям:

(а) если X, Y$\in$D, то (X$\cap$Y)$\in$D;

(б) если X$\in$D, X$\subseteq$Y$\subseteq I$, то Y$\in$D;

(в) $\varnothing\in$D.

Сразу отметим, что свойство включения $\subseteq$ пункт (б) определяет вид оценок не слабее ординальных чисел, где всякая неопределенность по замыканию любого проективного формата снимается для булевой алгебры P(I) ограничением по мощности фильтра $2^{\aleph_0}$. Если условия (а), (б) и (в) дополнить условием:

(г) если для всех X$\subseteq I$ имеем X$\in$D или (I \X)$\in$D; - то с учетом условий (а)-(г) фильтр D называется ультрафильтром D над I. Высказанные выше опасения с потерей замкнутости построений в булевой алгебре для ультрафильтра оцениваются в форматах обобщения континуум гипотезы и кардинальные значения $2^{\aleph_0}$ по оценки мощности ультрафильтра произвольно перераспределяются над I. Если можно установить в ординале прямого перечисления ω наименьший элемент над I с оценкой 2^{ω}, то фильтр и ультрафильтр называются главными. Это определение для ультрафильтра однозначно закрепляется, если ω рассматривается как главная нумерующая всех подмножеств и множеств, участвующая в построении некоторой алгебраической системы $\mathfrak{m}$ по D над I. Совершенно очевидно, что замыкание фильтра D над I никогда не совпадает с границами I или с одной его границей. Обычно договариваются о такой границе в некотором формате (I \X) который может принадлежать D, а может и не принадлежать. Булевая алгебра P(I) прорабатывает все эти построения для ультрафильтра как минимум в двух непринадлежностях над I: бесконечно удаленная точка и некоторая точка из X и (I \X). Поэтому универсальный принцип расширения некоторой аксиоматизируемой теории ультрафильтра основывается на базисном расширении свойств алгебраической системы $\mathfrak{m}$, построенной на фильтре D с одним условием непринадлежности. Все эти первичные определения несложно систематизировать в виде некоторой формальной теории малой размерности как вариант решения задачи универсального расширения некоторой аксиоматизируемой теории ультрафильтра D. Такой систематизацией в выборе эталона является пример введения определений и обозначений базовых ультрафильтров u_l, l$\in I$, в формате фильтра D и вне формата фильтра D. Как показано в [2] достаточно ограничиться построениями базовых ультрафильтров u_l, l$\in I$, не выходящих за формат D и более того, имеющих гомологическую размерность равную пяти. В этом случае содержательная часть аксиоматизируемой теории ультрафильтра становится полностью формальной, а сам фильтр D как алгебраическая система становится счетно полным. Действительно, для любой счетной системы элементов D ее пересечение также принадлежит D, а отсюда определение базы существует как для элемента множества [3], так и для самого множества [4]. Эффект введения конечной гомологической размерности, существует для каждой подмодели исходной модели алгебраической системы и прорабатывается на принципе подстановок и введения предикатных переменных вместо функциональных над тем же основным множеством M из всякого X$\in$D. Далее не сложно определить объект, который может быть подвержен разложению по базе для каждого базисного формата i$\in I$. Базисный формат i$\in I$ – это известное поточечное разложение Фурье над I. Если i$\in I_k$, $I_k\in I$, k$\in I$, то имеем известное разложение, применяемое в задачах сплайн-аппроксимации на каждом $I_k\in I$. Использование дополнительного базового формата над базисным как в первом случае разложения, так и во втором – методе сплайн-аппроксимации, - может усилить оценку мощности рассматриваемого фильтра или ультрафильтра. Более того, известны примеры фильтра, которые в условиях неопределенности построения на (I \X), т.е.

(I \X)$\notin$D, позволяют оценить мощность фильтра, перевести его в ультрафильтр и задать конструктивный алгоритм его реализации. Например, фильтр Фреше Φ над I, действующий в условиях ограничения по мощности **m** и двух отрицаний над I, т.е. I $=\mathbf{m}\geq\aleph_0$, существует как главный ультрафильтр, если $\Phi=\{X \mid X\subseteq I$ и $I \setminus X<\mathbf{m}\}$. Можно построить алгебраическую систему $\mathfrak{m}_i$, $i\in I$, формул вида ∃-выражений, таких как: для любого n $\{i \mid \mathfrak{m}_i|\varepsilon_n\}\in D$, где ε_n=u – некоторая формула в перечислении по i, i=1,…,n; D – фильтр или ультрафильтр. Если $\varepsilon_1=\exists x(x=x)$,…, $\varepsilon_n=\exists x_1\ldots\exists x_n(\underset{\substack{i\neq j\\ 1\leq i,j\leq n}}{\&}\urcorner x_i=x_j)$, для n≥2, - то для бесконечной области $I \setminus I_k$, $k\in I$, можно говорить о нормальных моделях, включающих предваренные /пренексные/ нормальные формы, сколемовские нормальные формы (или ∃∀-формулы), а также нормальные системы в сигнатуре равенства “=”. Подмодель $\varepsilon_n|$u, предикатная формула модели ε_n в форме предложений u, позволит установить истинность ε_n во всякой нормальной модели, содержащей по крайней мере n элементов /в силу наличия равенства $\urcorner x_i=x_j$, i≠j, 1≤i,j≤n/. Более того, имеет место эквивалентность следующих формул для нормальных моделей: $\exists v((\underset{i\neq j}{\&}\urcorner x_i=x_j)\&(\underset{1\leq i,j\leq n}{\&}\urcorner v=x_i))$, $((\underset{\substack{i\neq j\\ 1\leq i,j\leq n}}{\&}\urcorner x_i=x_j)\&\ \varepsilon_{n+1})$, которая реализуется как матрица 1≤i,j≤n, включающая свободные переменные x_i и, заполняемая как ε_n с окаймляющими столбцом и строкой при i=k+1 из ε_{n+1}. Формула ε_{n+1} включает одну строку или столбец из n значений вида $\urcorner v=x_i$, 1≤i≤n /остальные элементы строки и/или столбца в ε_{n+1} свободны/. Очевидно, что каждое предложение сигнатуры σ=< = > эквивалентно в нормальных моделях формуле, построенной из аксиом ε_1,…, ε_n с помощью &, ∨, ⌉ и /можно показать/ с помощью импликации ⊃. Также очевидно, что булевая алгебра P(I) снимает все противоречия универсального расширения в аксиоматизируемой теории, поскольку модель не выходит за рамки полумножеств вида v и ⌉v в рассмотренном матричном включении.

Оценим бесконечную мощность алгебраических систем в условиях расширения по типу фильтра и ультрафильтра D как в базисном, так и в базо-базисном разложении над I. В качестве таких систем $\mathfrak{m}_i$ по фильтру D можно рассмотреть фильтрованные произведения систем $\mathfrak{m}$ в обозначении $\mathfrak{m}=\prod_{i\in I}\mathfrak{m}_i/D=<\prod_{i\in I}M_i/D,\ \sigma>$, - где M_i, $i\leq I$, основные множества областей определения и областей значения /по аксиоме выбора/ систем $\mathfrak{m}_i$; σ − исходная сигнатура $\mathfrak{m}$. Если D ультрафильтр, то фильтрованные произведения $\prod_{i\in I}\mathfrak{m}_i/D$ называются ультрапроизведения. При этом, если все $\mathfrak{m}_i$ совпадают и равны $\mathfrak{m}$, то $\prod_{i\in I}\mathfrak{m}_i/D$ называется ультрастепенью $\mathfrak{m}$ и обозначается $\mathfrak{m}^{I}/D$. Эти формулы необходимо оценить по мощности введением кардинального числа **m** из некоторых ограничений согласно обобщенной континуум-гипотезы /GCH/. Для булевой алгебры форм включений I, (I \X), таким ограничением, как было показано выше, является оценка $\mathbf{m}<2^{\aleph_0}$, где $\aleph_0=|\omega|$. Известно [1], что для каждого бесконечного множества I существует такой фильтр D над I, что для каждого фильтра D_1 над I, содержащего D, и каждой бесконечной системы $\mathfrak{m}$ имеет место для ультрастепени $\mathfrak{m}^{\overline{\overline{I}}}/D_1\geq 2^{\overline{\overline{I}}}$ - где “=” двойное отрицание над I. Действительно, пусть $\{I_k\}_{k\in K}$ – семейство всех конечных непустых подмножеств множества I. Тогда K~I /эквивалентность по вложению ⊃, что совпадает с сильным гомоморфизмом над I /. Тогда с учетом того, что между ультрапроизведениями существует изоморфизм, а также сильный гомоморфизм, имеем оценку форматов булевой алгебры P(I): $2^{\overline{\overline{I}}}\leq\mathfrak{m}^{\overline{\overline{I}}}\leq\overline{\overline{\prod_{k\in K}}}\mathfrak{m}^{I_k}/D_2=\overline{\overline{\prod_{i\in I}}}\mathfrak{m}/D_1=\mathfrak{m}^{\overline{\overline{I}}}/D_1$, где D_2 есть прообраз относительно изоморфизма между K и I.

Первое неравенство верно для счетно полных фильтров и ультрафильтров, второе в силу избыточности классов эквивалентности по D_2 множеств M_i над основными множествами M, согласно обозначений фактормножеств m^{I_k}/D_2, где $M_i \in I_k$ Остальные равенства существуют в силу изоморфизма, определяющего гомоморфизм из K в /соответственно, на/ I. Отсюда следует утверждение: для любой бесконечной алгебраической системы m и любой данной мощности $\mathbf{m}$ существует ультрастепень системы m вида m^{I}/D, мощность которой больше $\mathbf{m}$. Как видно, за счет перестройки основных множеств $M_{ik} \in M_i$, $i \in I$, $k \in K$, $K \sim I$, можно в силу свойств сильного гомоморфизма достичь требуемого результата: $\mathsf{m}^{I}/D \geq \mathbf{m}$. Более того, основные множества M_{ik} можно подвергнуть разложению I_{kl} в свойстве базовых ультрафильтров u_l, $l=1,\ldots,5$, для каждого $k \in K$ на D'_2, где всякое $k_l \in K$, $l=1,\ldots,5$, определяет ту часть M_{ik}, которая содержит u_l на D'_2 и $D'_2 \supseteq D_2$. Между множеством k_l и K можно установить изоморфизм по l, $l=1,\ldots,5$, ψ_{kl}, $k \in K$, который можно продолжить на I. Тогда имеем вложение $I_{kl} \subset I_k \subset I$, $k \in K$, $i \in I$, $K \sim I$, $l=1,\ldots,5$, которое утверждает, что $D'_2 \subset D_2$. Однако, следует иметь в виду, что если первичный гомоморфизм, рассматриваемый при построении изоморфизма, не сильный, то равенство $D'_2=D_2$ не достижимо. Следовательно, условия базо-базисного вложения определяют включение $D'_2 \supseteq D_2$. Если при этих построениях первичный гомоморфизм сильный, то условия совместимости прообразов D'_2 и D_2 существуют. Отсюда $D'_2=D_2$, т.е. прообраз фильтра D_1 не изменился.

Конечное число $l=1,\ldots,5$, определяет, как известно, гомологическую размерность базовых ультрафильтров, с помощью которых производится замена в каждой алгебраической системе m^{I_k} ультрапроизведения $\prod_{l=1}^{5} \mathsf{m}^{I_{kl}}$. Отсюда имеем гомоморфизм $\mathsf{m}^{I_k} \Rightarrow \prod_{l=1}^{5} \mathsf{m}^{I_{kl}}$. Например, для фильтра Фреше по D_2 имеем: $\overline{\overline{\prod_{k\in K} \mathsf{m}^{\overline{\overline{I}}_k}/D_2}} \leq \overline{\overline{\prod_{k\in K}\prod_{l=1}^{5} \mathsf{m}^{\overline{\overline{I}}_{kl}}/D_2}}$, которая с учетом изоморфизма между K и I определяет равенства $\overline{\overline{\prod_{k\in K}\prod_{l=1}^{5} \mathsf{m}^{\overline{\overline{I}}_{kl}}/D_2}} = \overline{\overline{\prod_{i\in I}\prod_{l=1}^{5} \mathsf{m}^{\overline{\overline{I}}_{l}}/D_1}} \leq \overline{\overline{\prod_{l=1}^{5} \mathsf{m}^{\overline{\overline{I}}_{l}}/D_1}}$. Последнее неравенство /для ультрастепени/ определяет пять вложений I_l, $l=1,\ldots,5$, над I в смысле гомоморфизма относительно каждого $u_l \in \mathsf{m}^{I_l}$ с оценкой /тем более/ $2^{\overline{\overline{I}}_l} \leq \overline{\overline{\prod_{l=1}^{5} \mathsf{m}^{\overline{\overline{I}}_{l}}/D_1}}$. Как видно, условия сильного гомоморфизма некоторого базисного разложения в смысле оценки мощности $\mathbf{m}$ в виде ультрастепени $\mathsf{m}^{I}/D \geq \mathbf{m}$, позволяют перестроить эти оценки как базо-базисные разложения, рассматриваемые относительно типа базового ультрафильтра u_l, $l=1,\ldots,5$, [2] на каждом I_k семейства $\{I_k\}_{k\in K} \in I$.

Введение базовых ультрафильтров u_l, $l=1,\ldots,5$, на примере фильтра Фреше усиливает правую базо-базисную часть ультрапроизведений, а также переоценивает левую часть 2^{I_l} /или $2^{\overline{\overline{I}}_l} \leq \overline{\overline{\prod_{l=1}^{5} \mathsf{m}^{\overline{\overline{I}}_{l}}/D_1}}$/ в смысле базового разложения по $l=1,\ldots,5$, над I. Более того, если первичный гомоморфизм не сильный, то указанные оценки еще более могут усилиться, что особенно верно из известных типов разложения /поточечный Фурье, сплайн-аппроксимация/ для разложения базо-базисных определений, в частности, матричных. При этом верны такие термины: базовое, базисное, базисно-базовое разложение алгебраических систем. Введение однопараметрической зависимости, например, однопараметричесая зависимость интегральных пределов или вейвлет-анализ, - применимо во всех формах разложений.

Литература

1. И.А.Лавров, Л.Л.Максимова “Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов” Москва, Изд-во “Наука”, 1975, 240 с.
2. Б.И.Бадекин "U4 и U5 - базовые ультрафильтры". В 14 томах. Т 12: с 50-51. Научная сессия МИФИ - 2003. Сборник научных трудов. Информатика и процессы управления. Компьютерные системы и технологии. Москва, МИФИ, 2003, 228 с.
3. А.Н.Колмогоров, С.В.Фомин “Элементы теорий функций и функционального анализа”. Изд-во “Наука”, Москва, 1972, 496 с.
4. В.А.Зорич "Математический анализ" Часть I, стр.148. Москва, Изд-во МЦНМО, 2002.

THE BASE-BASIC DECOMPOSITION OF THE FILTERING AND ULTRAFILTERING OF MULTIDIMENSIONAL SIGNALS

Introduction of bases ultrafilters u_l, l=1, …, 5, homological dimensions equal five, in a basic part of decomposition of the filtered products and ultraproducts is considered. The infinite cardinal number **m** base-basic decomposition above I considered algebraic systems on the set filter or ultrafilter D is estimated. The general is resulted concerning the signature &, ∨, and $\rceil$, and also ⊃, the formula of construction of a matrix in requirements of a projective investment of configurations bases or any filters or ultrafilters, and also is given a comparative estimation of capacity of products of algebraic systems in conditions of basic and base-basic decomposition.