

# **ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ ДАННЫХ С ПРИМЕНЕНИЕМ НЕПРЕРЫВНОГО ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ**

**Jacques Lewalle, Syracuse University**

**Автор перевода: Грибунин В.Г.**

Электронная версия книги подготовлена фирмой АВТЭКС Санкт-Петербург,  
<http://www.autex.spb.ru>, E-mail: [info@autex.spb.ru](mailto:info@autex.spb.ru)

## ВВЕДЕНИЕ

Вейвлеты служат важным средством в гармоническом анализе. Ввиду их широкого использования и различности областей применения, даже само слово «вейвлет» разными исследователями понимается по-разному. Поэтому, мы должны сразу очертить круг освещаемых вопросов.

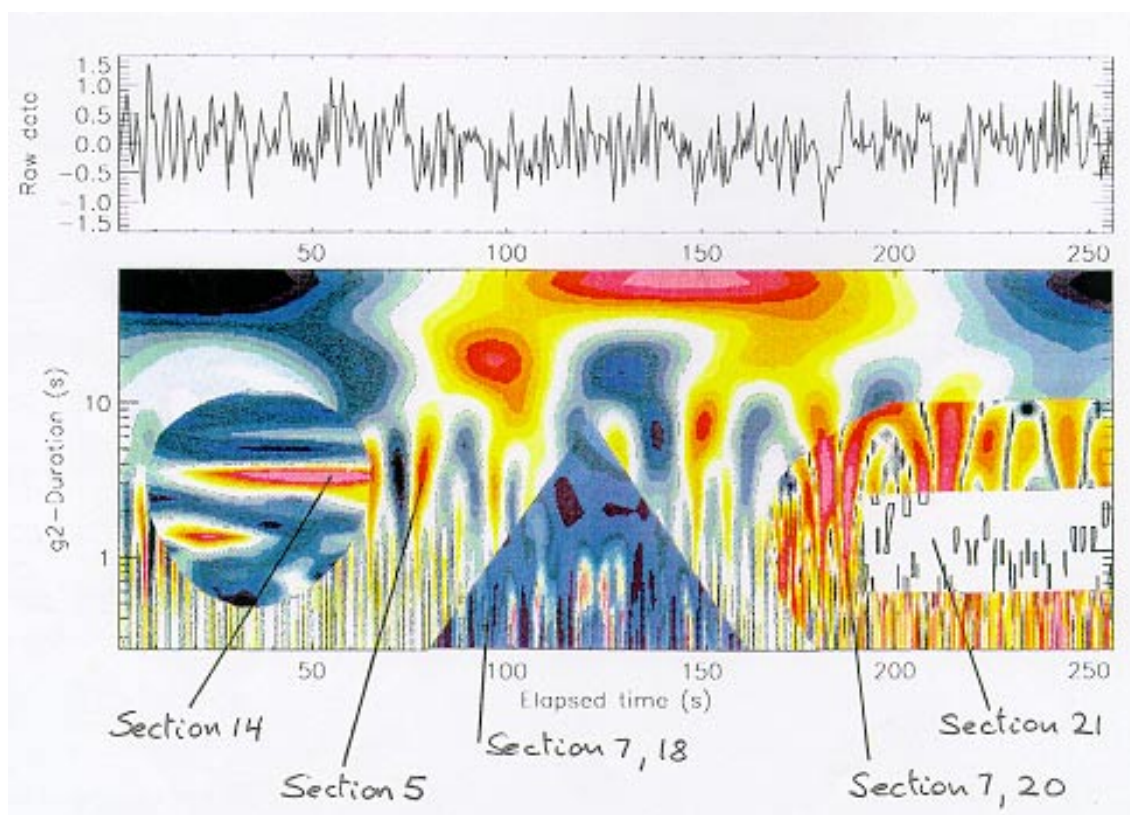
В настоящем учебнике вейвлеты объясняются на примере анализа экспериментальных временных рядов. Этот процесс выполняется в три этапа:

1. сигнал отображается в пространство вейвлетов (при этом появляется некоторая избыточность). Естественно, что никакой новой информации при этом не появляется, хотя объем цифрового представления увеличивается значительно.
2. в области преобразования выделяются, «высвечиваются» интересующие нас свойства.
3. объем информации уменьшается за счет применения статистических методов.

Важно заметить, что эти три шага не являются какими-то фиксированными, жестко определенными. У исследователя существует большая свобода не только в выборе преобразования, но и в количестве используемых шкал анализа, способов выделения интересующих свойств, отсекающая незначимой информации. При этом все направлено на то, чтобы получающиеся данные были бы более информативные, чем исходные. Важно только, чтобы применяемые методы не привели бы к потере важных свойств сигнала или к ложному приписыванию ему каких-то черт.

При анализе сигналов обычно не ставится задача получения компактного их представления. Уменьшение времени обработки информации является, конечно, важным (особенно при обработке в реальном времени), но оно не должно быть самоцелью и приводить к ухудшению качества анализа.

## ПРОСТОЙ ПРИМЕР

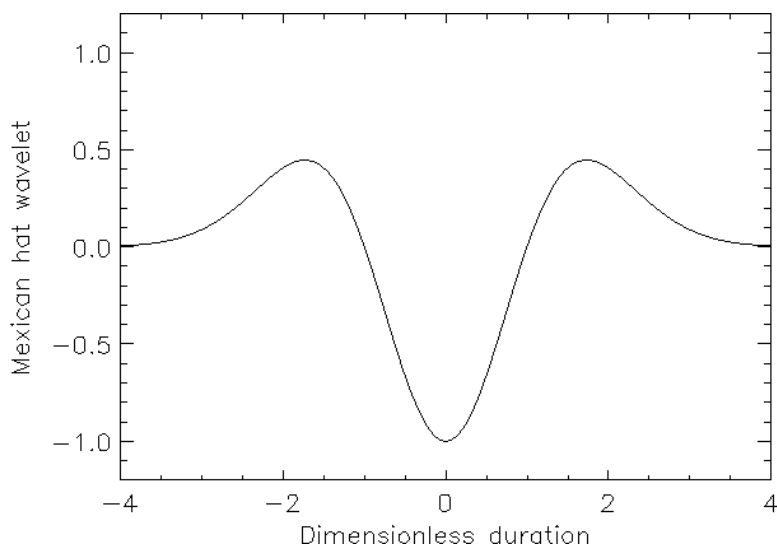


**Рис.1.** Представление данных с применением вейвлетов. Ось времени - общая для исходных и преобразованных данных, для последних вертикальная ось есть аналогия обратной частоты (раздел 10). На графике для вейвлетов показана зависимость величины локальных максимумов (сине-серый цвет) и локальных минимумов (желто-красный цвет) от времени и длительности. Построение такого графика описано в разделе 5, а примененный для анализа вейвлет - Мексиканская шляпа - в разделе 3. Врезки на графике иллюстрируют локальную периодичность флуктуаций (раздел 14), нормализованную плотность энергии (разделы 7 и 20), импульсы энергии (раздел 18) и локальные максимумы энергии (раздел 21).

На Рис.1 показано, как на короткой выборке из одного набора данных можно получать различные результаты, в зависимости от задачи. Числа отображают разделы, в которых рассмотрены соответствующие алгоритмы.

## ВЕЙВЛЕТ

Мы начнем с простого вейвлета - Мексиканской шляпы, показанного на Рис.2. Нам удобнее представлять его «опрокинутым», с провалом посередине (верх шляпы) и двумя горбами по бокам.



**Рис.2.** Вейвлет Мексиканская шляпа.

Важно заметить, что для этого вейвлета площади положительных и отрицательных значений чисел под кривой равны. Этот факт известен как условие допустимости. Аналитическое выражение для вейвлета Мексиканской шляпы:

$$g_2(z) = (z^2 - 1) \exp\left(\frac{-z^2}{2}\right) \quad (1)$$

т.е. он является второй производной гауссиана. Условие допустимости (Добеши) выполняется если:

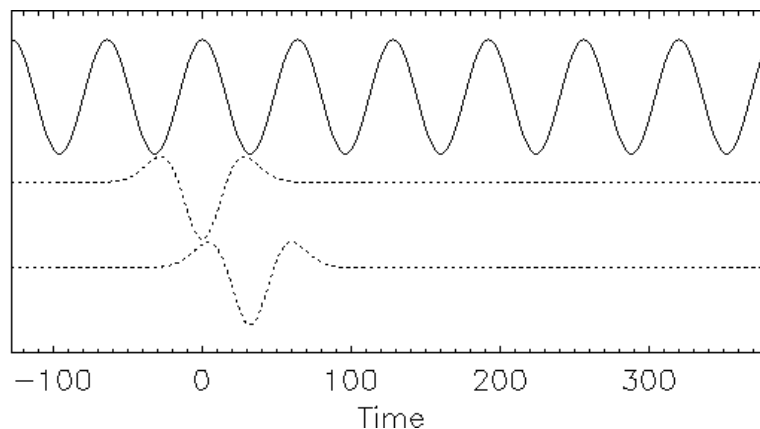
$$\int_{-\infty}^{\infty} g_2(t) dt = 0 \quad (2)$$

Условие допустимости означает, что существует обратное преобразование и применима формула Парсевала. Выбор вида огибающей вейвлета для проведения анализа является одним из важнейших решений, которые должен принять исследователь. Общим правилом здесь является то, что вид вейвлета должен быть похож на вид анализируемых данных. Если сигнал гладкий, берем гладкий вейвлет типа рассмотренного выше, если нет - то делаем другой выбор.

## АНАЛИЗ КОСИНУСОИДЫ

Возьмем сравнительно простой сигнал: косинусоиду. Сразу оговоримся, что Фурье-анализ имеет в этом случае несомненное преимущество перед вейвлет-анализом (в идеальном случае имеем один коэффициент Фурье).

Вейвлет-анализ выполняется следующим образом: вейвлет (в данном случае Мексиканская шляпа) сдвигается вдоль всего сигнала и на каждом сдвиге его огибающая "сравнивается" с огибающей сигнала. Далее вейвлет сжимается или растягивается вдоль временной оси, и процесс повторяется. Сколько раз повторять процесс? Выбор за вами. Чем больше повторов, тем более избыточным будет представление. Длительность вейвлета (интервал определения) будем измерять расстоянием  $g_2$  от его минимального значения до точки первого пересечения с осью абсцисс. Для сканирования всего периода косинусоиды необходимо примерно четыре интервала вейвлета (на Рис.3 вейвлеты смещены на два интервала).



**Рис.3.** Вейвлет (точечная линия) сдвигается относительно сигнала (сплошная линия).

Итак, будем считать, что длительность вейвлета ровно четверть периода косинусоиды. Смещая вейвлет вдоль сигнала, мы то получаем хорошее совпадение (но с противоположными знаками), то «расхождение» вейвлета и сигнала, то опять совпадение (но уже с одинаковыми знаками) и т.д. (Рис.4).

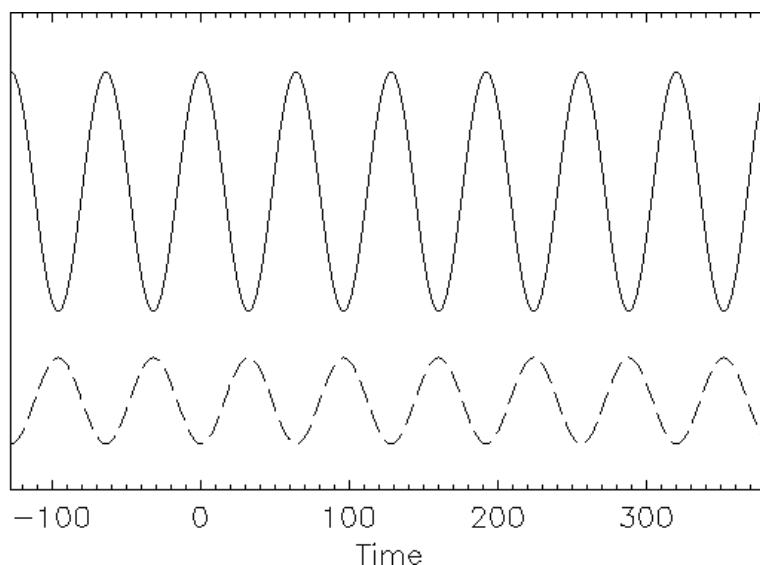
Опишем теперь этот процесс на языке формул. Пусть сигнал  $f(t) = \cos(2\pi t)$  и примерно соответствующий ему по длительности вейвлет  $g_2(4t)$ . Можно измерить степень «похожести» вейвлета и сигнала в точке, взяв интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) g_2(4t) dt$$

Для анализа сигнала в другое время  $T$ , запишем

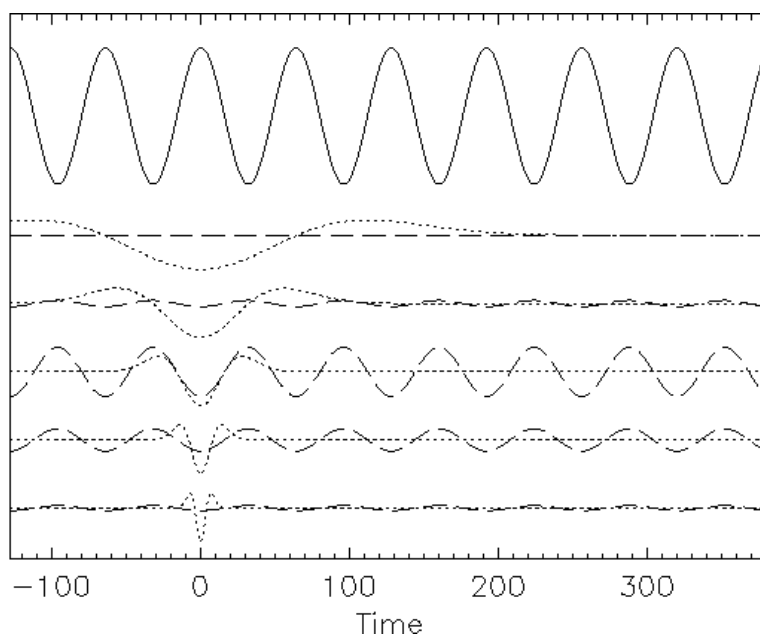
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) g_2(4(t-T)) dt$$

С изменением  $T$  значения интеграла периодически изменяются



**Рис.4.** Штриховой линией изображено "соответствие" между вейвлетами и сигналом (сплошная линия) во времени.

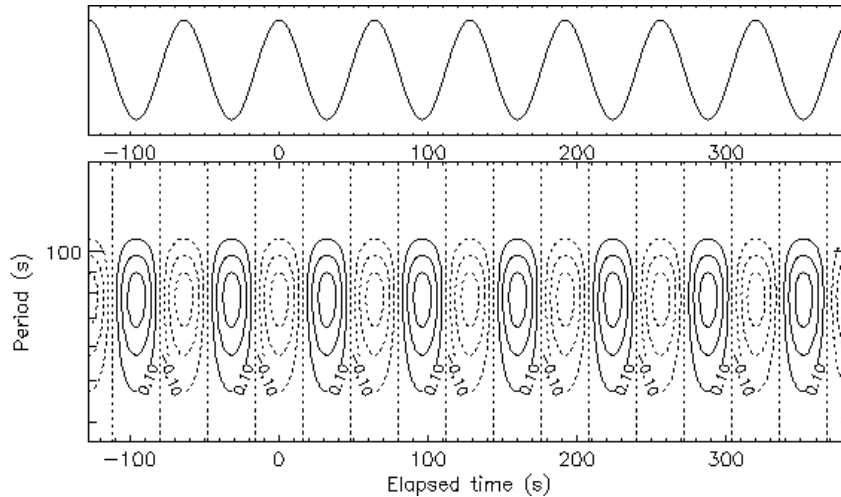
Теперь повторим этот процесс для вейвлетов той же формы, но другой длительности (Рис.5). Как видно из рисунка, свойства сигнала не одинаково хорошо отражаются при преобразовании с вейвлетами различной длительности. Сигнал становится все ближе к константе на длительности вейвлета при уменьшении его длительности, а значение интеграла уменьшается. Аналогичное явление наблюдается и при увеличении длительности вейвлета, например, в четыре раза  $g_2(t/4)$ : несколько периодов сигнала умещаются на протяжении длительности вейвлета, положительные значения компенсируют отрицательные, и значение интеграла мало. Это является одним из следствий условия допустимости, то есть вейвлет автоматически выделяет локальное среднее сигнала.



**Рис.5.** Сигнал анализируется вейвлетами различной длительности. Вейвлет-преобразование показано штриховой линией. Наибольшие значения коэффициентов преобразования получаются в случае, когда длительность вейвлета соответствует периоду сигнала.

## НЕПРЕРЫВНЫЕ ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Итак, разрешение по частоте достигается путем выбора соответствующего размера вейвлета, а разрешение по времени - за счет помещения вейвлета относительно сигнала (Рис.6).



**Рис.6.** *Контурной линией показано представление вейвлет-преобразования с почти непрерывно изменяющимися длительностями вейвлетов.*

Как видно из рисунка, вейвлет-преобразование дает частотно-временное представление сигнала: одновременно видна и частота сигнала, и особенности его временного представления.

Аналитически непрерывное вейвлет-преобразование записывается в виде:

$$f_2(k,t) = \sqrt{k} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) g_2(k(y-t)) dy \quad (3)$$

Коэффициент  $\sqrt{k}$  необходим для сохранения нормы. В случае рассматриваемого косинусного сигнала,  $\cos(at)$ , преобразование может быть вычислено непосредственно:

$$f_2(k,t) = -\sqrt{2\pi} a^2 \cos(at) k^{-\frac{5}{2}} \exp\left(\frac{-a^2}{2k^2}\right) \quad (4)$$

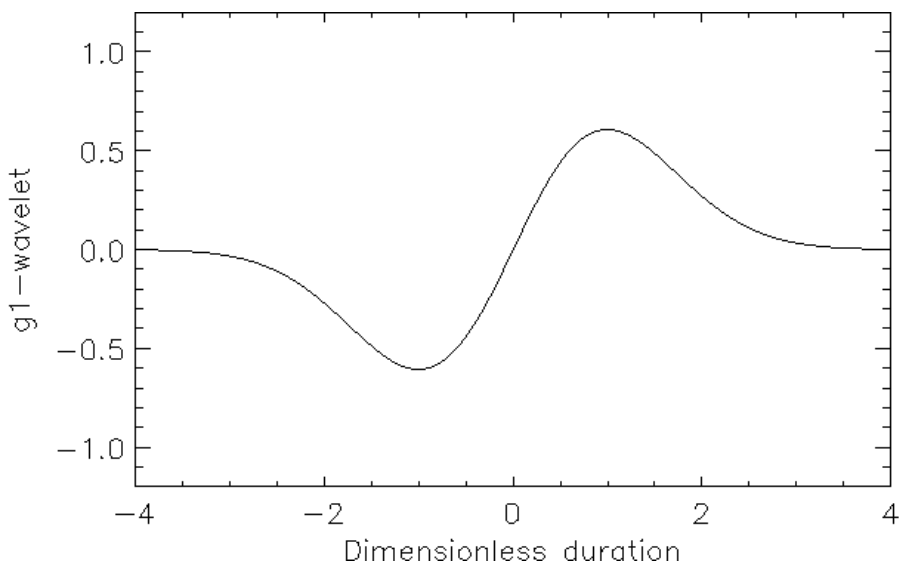
откуда видно, что амплитуда преобразования убывает, как при увеличении  $k$  (по степенному закону), так и при его уменьшении (по экспоненте). Большие значения  $k$  соответствуют коротким длительностям вейвлета, малые - большим длительностям.



## ИНТЕРПРЕТАЦИЯ

Вейвлетная плоскость есть графическое изображение функции  $f_2$  (обычно называемой вейвлет-коэффициентами) двух переменных  $k$  и  $k$  для данного вейвлета. Большие значения коэффициентов означают наличие в сигнале значительных флуктуаций в данный момент времени и одновременно хорошее соответствие огибающей сигнала и вейвлета. Вейвлет как бы изолирует локальные минимумы и максимумы сигнала выбранной длительности. Это свойство надо учитывать при интерпретации вейвлетной плоскости.

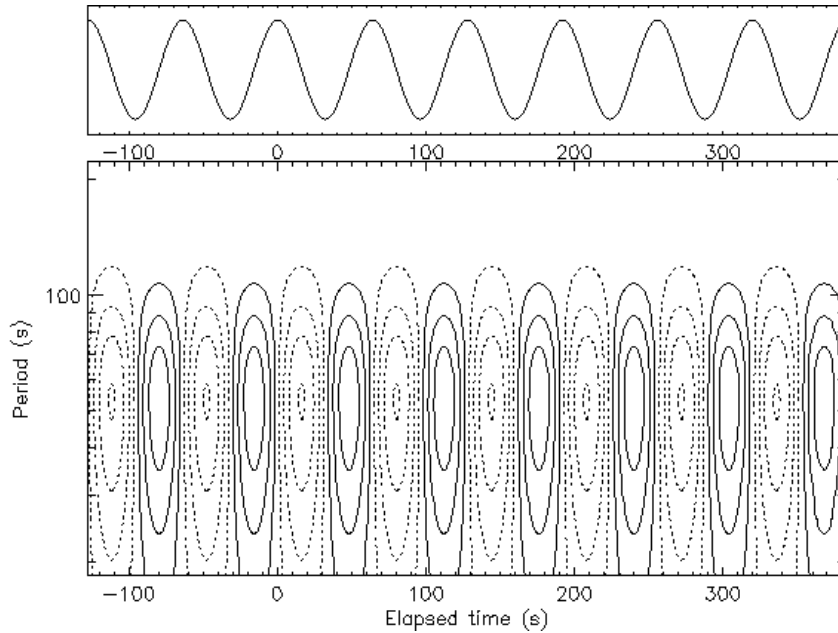
Например, повторим построение вейвлетной плоскости для антисимметричного вейвлета (Рис.7).



**Рис.7.** Антисимметричный вейвлет  $g_1$ .

$$g_1(z) = z \exp\left(\frac{-z^2}{2}\right) \quad (5)$$

Мы видим, что рисунок примерно похож на рассмотренный ранее. В целом заметен «фазовый сдвиг», связанный с другой формой огибающей вейвлета (Рис.8).



**Рис.8.** Вейвлетная плоскость  $g1$  косинусоиды подчеркивает градиенты сигнала.

Вейвлет  $g1$ , таким образом, выделяет градиенты сигнала. Можно записать выражение:

$$f_1(k, t) = -\sqrt{2\pi} a \sin(at) k^{-\frac{3}{2}} \exp\left(\frac{-a^2}{2k^2}\right) \quad (6)$$

и фазовый сдвиг между сигналом и трансформантой становится понятным, так как появляется синусная функция. Нетрудно показать взаимосвязь между гауссовским вейвлет-преобразованием (рассмотренные ранее  $g1$  и  $g2$ ) и последовательным дифференцированием для гладкого сигнала. Определим гладкость гауссовского ядра длительности  $1/k$  как

$$f_0(k, t) = \sqrt{k} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) g_0(k(y-t)) dy \quad (7)$$

где

$$g_0(z) = \exp\left(\frac{-z^2}{2}\right) \quad (8)$$

Для рассматриваемой косинусоиды имеем

$$f_0(k, t) = \sqrt{2\pi} \cos(at) k^{-\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{-a^2}{2k^2}\right) \quad (9)$$

Отметим, что  $g_0$  не является вейвлетом, так как площадь под кривой  $g_0$  ненулевая. Дифференцирование  $f_0$  и интегрирование по частям дает:

$$f_1(k, t) = \frac{d}{dt} f_0(k, t) \quad (10)$$

т.е. наклон сглаженного сигнала при масштабе  $k$ , и

$$f_2(k, t) = \frac{d^2}{dt^2} f_0(k, t) \quad (11)$$

есть не что иное, как вторая производная сглаженного сигнала.

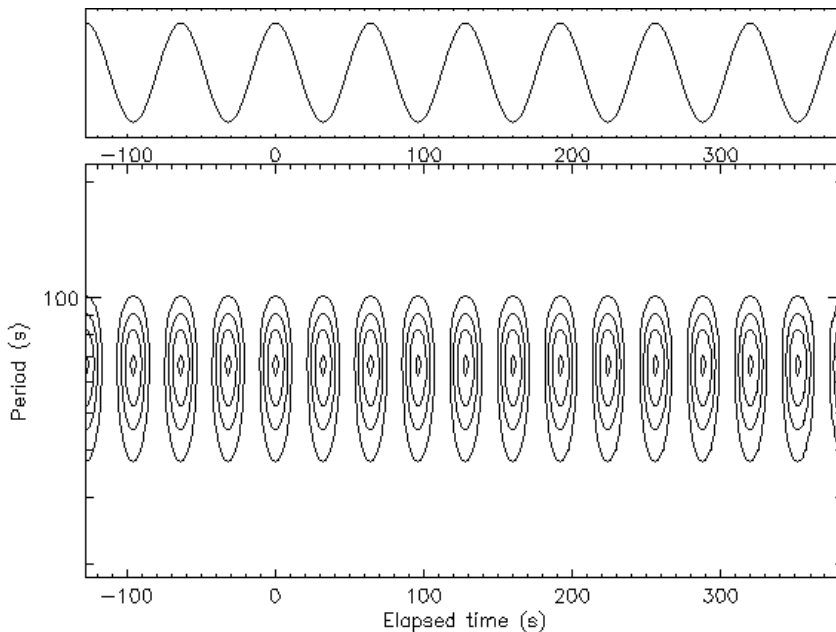
## РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЭНЕРГИИ

Одним из важнейших средств анализа Фурье является теорема Парсеваля. Она позволяет экспериментатору оценить распределение энергии по частотам. Разработка алгоритмов быстрого преобразования Фурье сделала спектр мощности одним из наглядных средств анализа во время сбора данных и мощной альтернативой графикам распределения энергии.

В теории вейвлет-преобразования доказывается аналогичная теорема. В данном случае плотность энергии распределена в вейвлетной полуплоскости  $(k,t)$ , согласно выражению

$$E_2(k,t) = \frac{|f_2(k,t)|^2}{\pi} \quad (12)$$

для преобразования с Мексиканской шляпой (как показано далее, для других вейвлетов нормализующая константа иная). В результате получается распределение энергии (Рис.9), отображающее распределение в соответствии с вейвлетной плоскостью (Рис.6).

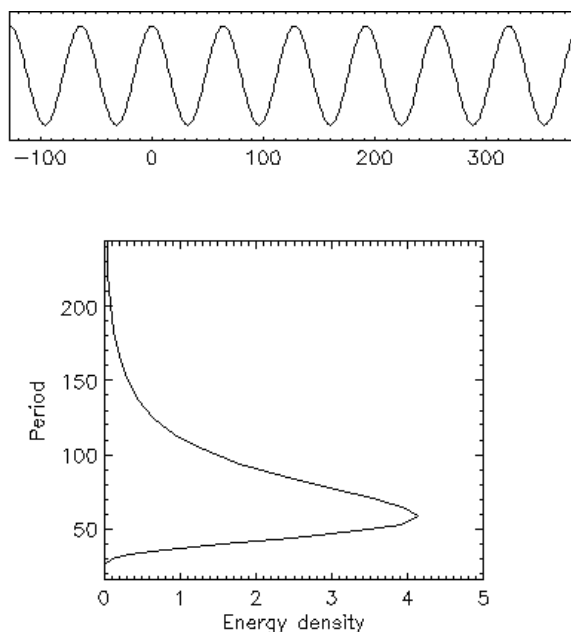


**Рис.9.** Распределение энергии во времени/длительности зависит от вейвлета.

Аналитическое представление распределения энергии вейвлет-преобразования косинусоиды для вейвлета типа Мексиканская шляпа:

$$E_2(k,t) = 2 a^4 \cos^2(at) k^{-5} \exp\left(\frac{-a^2}{k^2}\right) \quad (13)$$

## УСРЕДНЕННЫЙ СПЕКТР МОЩНОСТИ



**Рис.10.** *Усредненный спектр мощности, полученный путем усреднения энергетического распределения для каждой длительности. Для непериодических сигналов среднее значение вейвлет-спектра аналогично спектру Фурье.*

Распределение энергии может быть проинтегрировано по времени для каждой длительности. Результат этой операции (Рис.10) заключается в распределении энергии сигнала по длительностям - то же, что происходит и при вычислении спектра мощности Фурье.

Интегрируя плотность энергии по целому числу периодов, получаем

$$E_2(k) \approx k^{-5} \exp\left(\frac{-a^2}{k^2}\right) \quad (14)$$

Результат не такой четкий, как в случае Фурье-преобразования, когда наблюдается единственный импульс на частоте  $(a/2\pi)$  в силу оптимального согласования между базисом (синусоидой) и анализируемым сигналом. Зато в нашем случае достигнута временная локализация частотного всплеска - за счет уменьшения частотного разрешения.

Математически это может быть выражено следующим образом. Обозначим  $F(z)$  преобразование Фурье сигнала,  $G_2(z)$  преобразование Фурье вейвлета мексиканской шляпы. Далее, после проведения нескольких упрощений можно получить другое выражение для вейвлет-преобразования:

$$f_2(k, t) = \frac{1}{\sqrt{k}} \int_{-\infty}^{\infty} F(z) G(z/k) dz \quad (15)$$

где вейвлет-преобразование представляется как результат полосовой фильтрации преобразования Фурье. Ширина огибающей вейвлета  $g_2$  связана с шириной его спектра  $G_2(z)$ ; чем уже вейвлет во временной области, тем шире его спектральное представление.

## ИНТЕРПРЕТАЦИЯ

Вернемся снова к теореме Парсеваля для преобразований Фурье и вейвлет. Данная теорема гласит, что

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt & \quad \text{полная энергия в сигнале} \\ = \int_{-\infty}^{\infty} |F(z)|^2 dz & \quad \text{полная энергия в фурье-спектре} \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} |f_2(k, t)|^2 / \pi dt dk & \quad \text{полная энергия в распределении энергии} \\ = \int_0^{\infty} E(k) dk & \quad \text{полная энергия в смешанном спектре} \quad (16) \end{aligned}$$

т.е. интегралы имеют одинаковые значения. Конечно, это не означает, что подынтегральные выражения равны. Существует бесконечное множество выражений, интегралы от которых удовлетворяют этим формулам, каждое из них образуют свой базис.

Подынтегральные выражения могут рассматриваться как плотность энергии.

## ВЗАИМОСВЯЗЬ МЕЖДУ ЧАСТОТОЙ И ДЛИТЕЛЬНОСТЬЮ

Концепции частоты Фурье и длительности вейвлета тесно взаимосвязаны. Для преобразования одного спектра в другой необходимо установить связь между двумя представлениями, хотя бы на качественном уровне. Правда, это соответствие будет зависеть от огибающей вейвлета.

Возможны различные пути установления связи между Фурье- и вейвлет-представлениями сигнала. Мы потребуем, чтобы пик усредненного вейвлет-спектра соответствовал бы сингулярности фурье-преобразования косинусоиды. Тогда может быть показано, что частота ( $a/2\pi$ ) вейвлета  $1/k$  отношением

$$a/k = \sqrt{5/2} \quad (17)$$

и для  $g1$  вейвлета

$$a/k = \sqrt{3/2} \quad (18)$$

Эти выражения справедливы для любого типа вейвлета. Пик усредненного спектра вейвлета  $g2$  получается путем взятия производной по  $k$  от спектра и приравнивая ее к нулю:

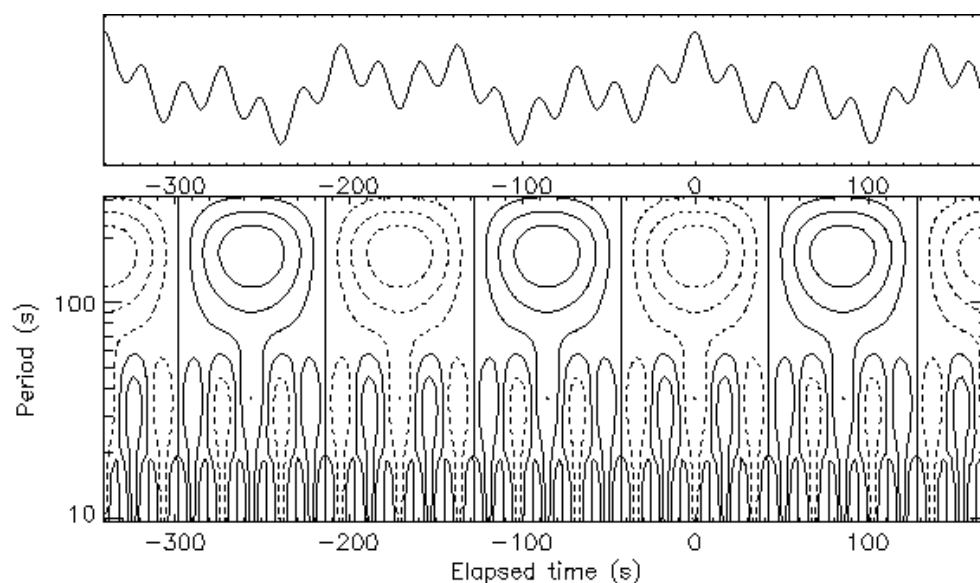
$$\frac{d}{dk} E_2(k) = \frac{d}{dk} \left[ k^{-5} \exp\left(\frac{-a^2}{k^2}\right) \right] = 0 \quad (19)$$

откуда можно получить вышеприведенное выражение.

Вообще, надо отметить, что длительность вейвлета определить не так то просто. Бывают вейвлеты самой разной формы, и в каждом конкретном случае надо договариваться, что мы понимаем под длительностью.

## АНАЛИЗ МНОГОПЕРИОДИЧЕСКОГО СИГНАЛА

Рассмотрим теперь пример анализа более сложного сигнала, при котором преобразования не будут иметь аналитических выражений. Для начала возьмем сигнал, состоящий из трех косинусоидов различных частот и фаз. Выполним вейвлет-анализ сигнала с использованием вейвлета Мексиканской шляпы. Получаем, как и раньше, вейвлетную плоскость (Рис.11). Четко видно разделение частот, также как и фазовые отношения между косинусоидами.

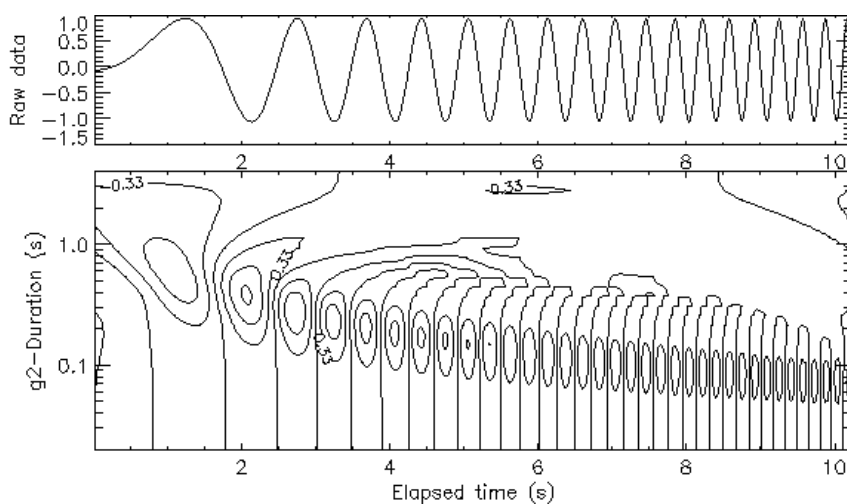


**Рис.11.** *g2-преобразование многопериодического сигнала.*



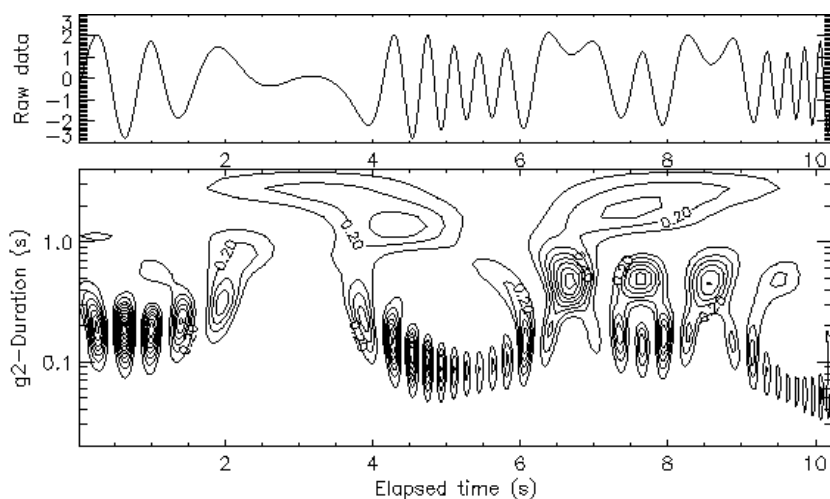
## ПРЕОБРАЗОВАНИЕ МОДУЛИРОВАННЫХ КОЛЕБАНИЙ

Как отмечалось ранее, Фурье-анализ является оптимальным в случае периодического сигнала. Поэтому для подчеркивания свойств вейвлет-анализа мы используем непериодический сигнал, с управляемой степенью этой непериодичности. На Рис.12 показан график сигнала  $\sin(x^2)$  и его вейвлет-преобразования (вейвлет – Мексиканская шляпа).



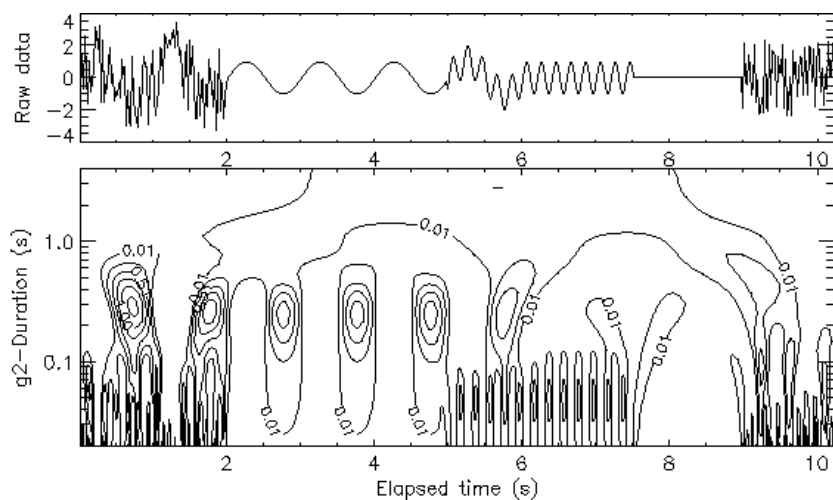
**Рис.12.** На вейвлетной плоскости сигнала четко видно плавное уменьшение периода сигнала.

На вейвлетной плоскости, как и ожидалось, наблюдается плавное уменьшение расстояния между локальными максимумами и минимумами сигнала. Далее рассмотрим синусоиду, модулированную по амплитуде и частоте. Соответствующая вейвлетная плоскость показана на Рис.13.



**Рис.13.** Вейвлетная плоскость сильно модулированного колебания.

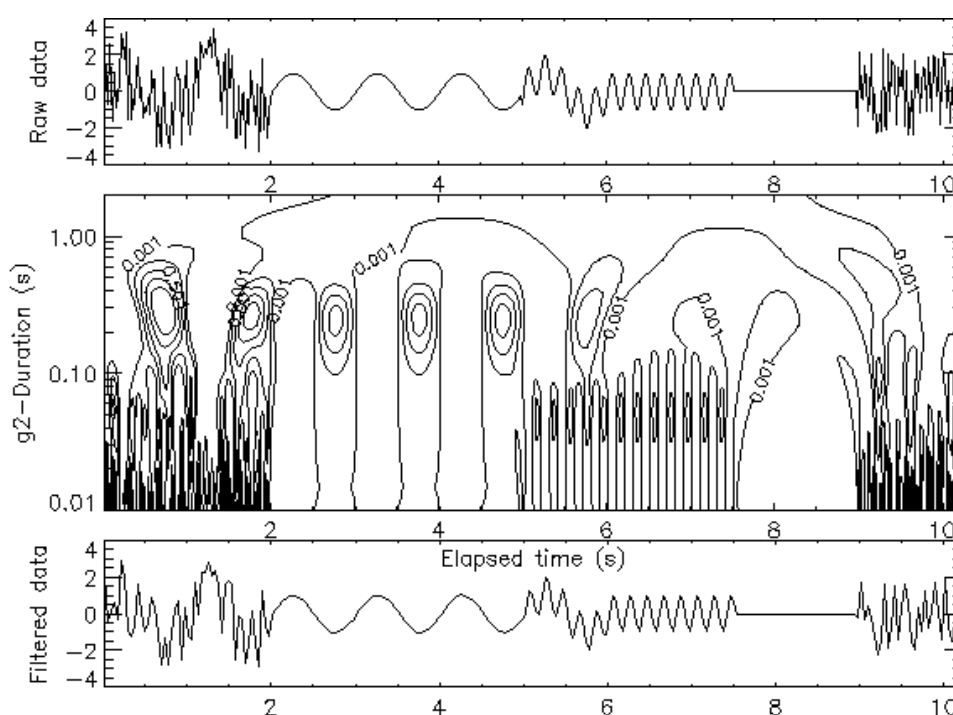
Наконец, рассмотрим смешанный сигнал, состоящий из неперекрывающихся синусоид различных частот и случайного шума. На Рис.14 показаны для удобства только положительные значения вейвлет-преобразования.



**Рис.14.** Вейвлетная плоскость смешанного сигнала.

## ОБРАТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ

Как и в случае преобразования Фурье, при вейвлет-преобразовании подразумевается, что сигнал состоит из некоторых строительных блоков, и что реконструкция из коэффициентов преобразования возможна. К сожалению, в каждый момент времени сигнал не является просто наложением каких-то значений, взятых вдоль вертикальной линии плоскости вейвлет-преобразования. На самом деле его значение может быть получено в результате свертки этих вейвлет-коэффициентов и вейвлета, примененного при анализе и интегрирования результата по всем длительностям. На Рис.15 показано, что сигнал может быть полностью восстановлен таким образом, за исключением высокочастотной части (чтобы восстановить шумовую составляющую мы должны «расширить» вейвлетную плоскость в направлении более коротких длительностей).



**Рис.15.** Реконструкция исходного сигнала из его вейвлетной плоскости показана внизу рисунка. Наблюдается некоторая потеря высокочастотных составляющих.

Обратное преобразование для вейвлета Мексиканской шляпы представляется как

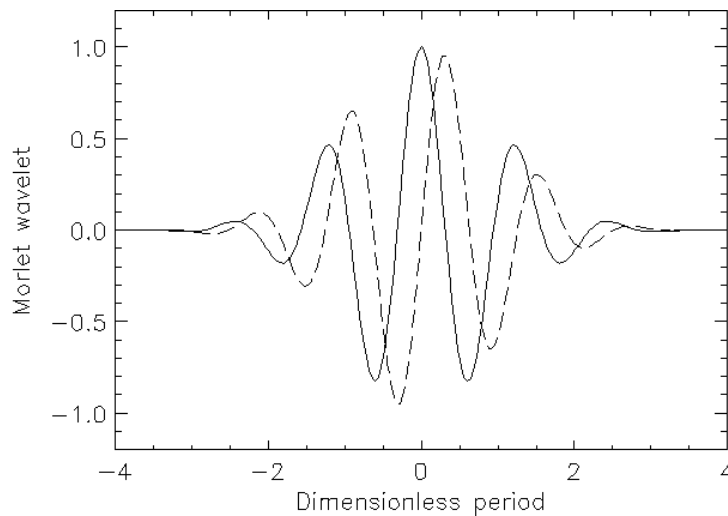
$$f(t) = \int_0^{\infty} dk \sqrt{k} \int_{-\infty}^{\infty} dz f_2(k, z) g_2(k(t-z)) / \pi \quad (20)$$

Этот интеграл предполагает, что возможно выполнить непрерывное вейвлет-преобразование для всех длительностей  $m$  всех моментов времени. На практике используются дискретные значения сигнала и вейвлетной плоскости, что приводит к определенным ошибкам, анализируемым в теории фреймов.

## ВЕЙВЛЕТ И ПРЕОБРАЗОВАНИЕ МОРЛЕ

Вейвлет Морле - исторически первая функция, получившая название вейвлета. Хотя дискретные функции (вейвлеты) Хаара были изучены гораздо раньше вейвлетов Морле, только с работы Морле началось изучение этих функций в контексте частотно-временного анализа.

Вейвлет Морле тесно связан с кратковременным (оконым) преобразованием Фурье. Он получается следующим образом: берется комплексная синусоида, и на нее накладывается колоколообразная гауссовская функция (Рис. 16).



**Рис.16.** Действительная (сплошная) и мнимая (штриховая) части вейвлета Морле при  $z_0 = 5$ .

Непериодическая функция может быть усечена таким образом, чтобы условие допустимости удовлетворялось. Для синусоиды единичной частоты внутри огибающей ширины  $z_0 / \pi$ , имеем

$$\phi(x, z_0) = (\cos 2\pi x + i \sin 2\pi x) \cdot \exp\left(\frac{-2x^2 \pi^2}{z_0^2}\right) - \exp\left(\frac{-z_0^2}{2} - \frac{-2x^2 \pi^2}{z_0^2}\right) \quad (21)$$

Выбор  $z_0$  отражает компромисс между локализацией во времени (Мексиканская шляпа локализует единичные пики) и по частоте (бесконечно протяженная синусоида локализована по частоте): значение  $z_0 = 5$  рекомендуется, но может быть и изменено.

Так как вейвлет-преобразование имеет вещественную и мнимую части, удобно представить его в полярных координатах: норма есть амплитуда преобразования и, будучи связана с локальной энергией, представляет главный интерес, тогда как полярный угол (фаза) дополняет общую картину. Также как и в случае преобразования Фурье, для вычисления обратного преобразования требуется

знание как вещественной, так и мнимой части. Ниже будет показано только амплитудная часть преобразования. Для того, чтобы квадрат нормы преобразования Морле соответствовал бы локальной спектральной энергии, он должен быть поделен на нормирующий коэффициент

$$c_g = z_0^{-2} \exp(-z_0^{-2}) [\operatorname{erfi}(z_0) / 2 - \operatorname{erfi}(z_0 / 2)] \quad (22)$$

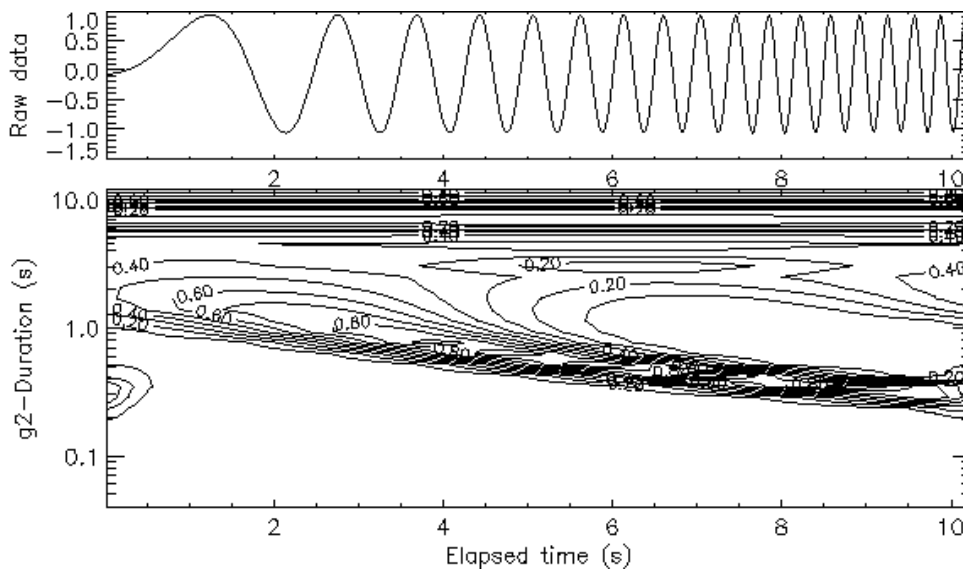
Для общего значения  $z_0 = 5$  используемого в вышеприведенных графиках

$$c_g = 1.44057... \quad (23)$$

## ПРЕОБРАЗОВАНИЕ МОРЛЕ МОДУЛИРОВАННОГО СИГНАЛА

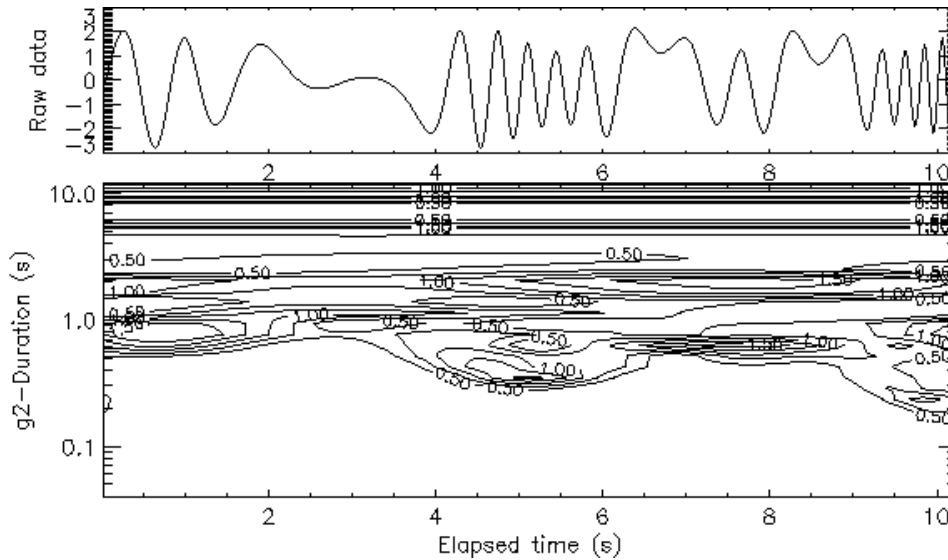
Модулированные сигналы подвергаются преобразованию Морле и локальные нормы преобразований показаны ниже.

Для сигнала  $\sin(x^2)$  преобразование Морле показывает плавное увеличение его частоты (Рис.17). Наиболее заметное отличие от преобразования с использованием Мексиканской шляпы заключается в том, что на этот раз подчеркнуты не локальные максимумы и минимумы сигнала, а его локальная периодичность.



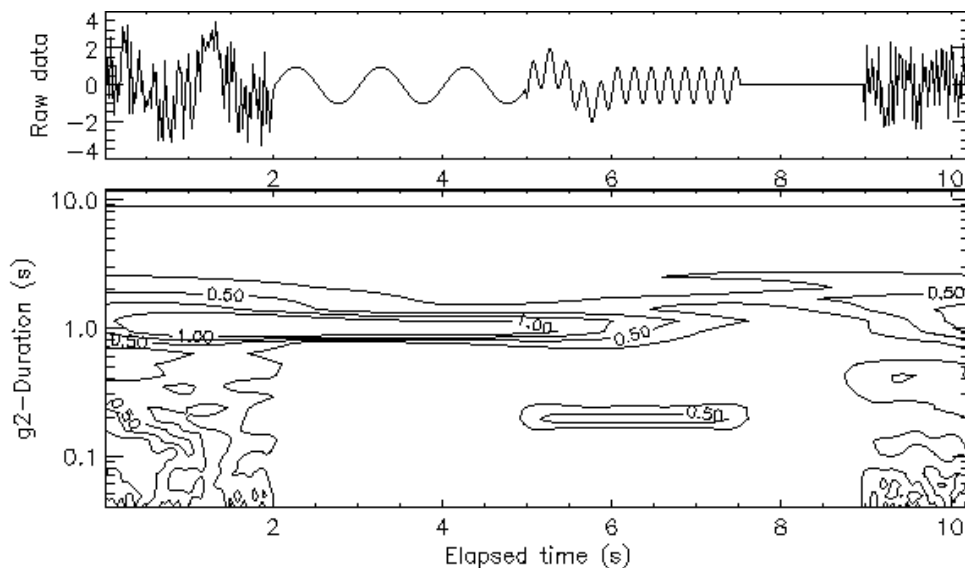
**Рис.17.** Вейвлет-преобразование Морле сигнала  $\sin(x^2)$ .

В случае сигнала, модулированного по частоте и амплитуде (Рис. 18), результаты менее наглядны, так как для вейвлета Морле сигнал должен содержать достаточно длительные синусоидальные составляющие, чтобы «резонировать» с вейвлетом.



**Рис.18.** Преобразование Морле модулированного сигнала.

Наконец, для смешанного сигнала вейвлет Морле (Рис. 19) четко разделяет случайные флуктуации и периодические компоненты сигнала. Отметим, что период синусоид определяется более точно, чем при использовании вейвлета Мексиканской шляпы.



**Рис.19.** Вейвлет-преобразование Морле смешанного сигнала.

Таким образом, выбор вейвлета в каждом конкретном случае является очень важным. В зависимости от анализируемого сигнала тот или иной вейвлет может оказаться более подходящим для решения задачи.

## ОБЩАЯ ФОРМУЛА

Настал момент подытожить основные формулы вейвлет-анализа. Обозначим через  $f(t)$  сигнал, через  $g(t)$  вейвлет, через  $h(k,t)$  вейвлет-преобразование. Комплексно сопряженные величины будут обозначаться звездочкой. Преобразование Фурье функции будет обозначаться заглавными буквами и определяться как

$$F(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-2i\pi zt) dt \quad (24)$$

Вейвлет называется допустимым, если его норма

$$c_g = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|G|^2}{z} dz \quad (25)$$

конечна. Может быть показано, что для вещественного непрерывного вейвлета отсюда следует выражение

$$\int_0^{\infty} g(t) dt = 0$$

при этих условиях вейвлет-преобразование определяется как

$$h(k,t) = \sqrt{k} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g^*(k(x-t)) dx \quad (26)$$

формула для обратного преобразования

$$f(t) = \frac{1}{c_g} \int_0^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} dx \sqrt{k} h(k,t) g(k(t-x)) \quad (27)$$

и формула Парсеваля

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f|^2 dt = \frac{1}{c_g} \int_0^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} |h|^2 dt \quad (28)$$

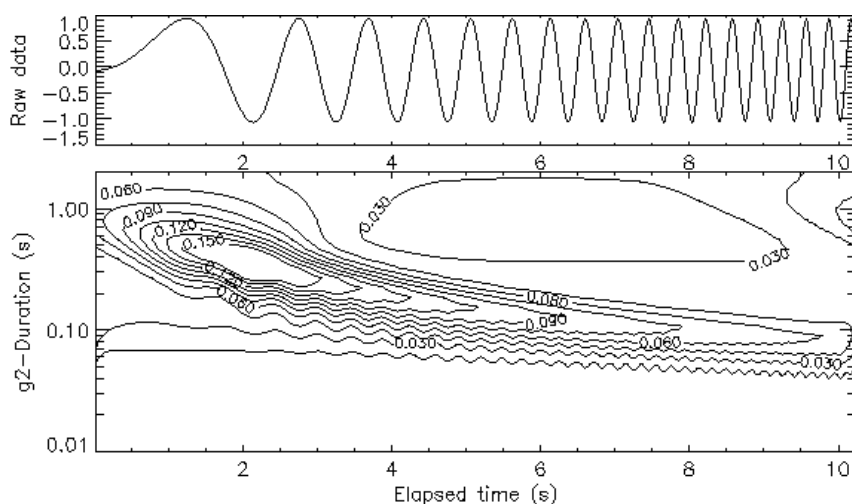
## КОММЕНТАРИЙ

Вейвлет-анализ применяется обычно для анализа сложных данных. Отображение данных в масштабно-временную плоскость позволяет «высветить» различные свойства сложного сигнала, невидимые при обычном представлении. Такое возможно благодаря большой избыточности преобразования, которая, в общем, может быть устранена при дальнейшей обработке.

Устранение избыточности может осуществляться на основе двух основных подходов (и бесчисленного числа их вариаций). Во-первых, на вейвлетной плоскости могут оставаться лишь только интересующие нас свойства сигнала, а все остальные - удаляться. Типичным приложением является очистка сигналов от шумов, идентификация объектов и т.д. Другой подход является статистическим и заключается в вычислении распределений и моментов. В зависимости от задачи экспериментатор должен сам решить, какой подход ему применить.

## ПОДЧЕРКИВАНИЕ СВОЙСТВ: ПУЛЬСАЦИИ

Выше уже была отмечена значительная разница в представлении модулированных сигналов вейвлетами Морле и Мексиканской шляпой. В первом случае лучше видны периодические компоненты, во втором - импульсы в сигнале.



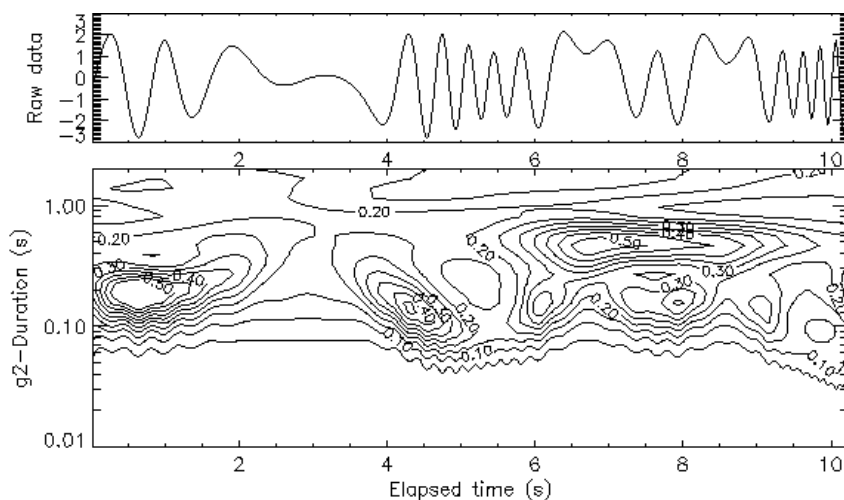
**Рис.20.** Сглаженная плотность энергии  $\sin(x^2)$  может быть сравнена с преобразованием Морле.

Было бы интересно получить сглаженное представление сигнала типа Морле, но без всяких предположений о его периодичности. Это может быть достигнуто следующим образом:

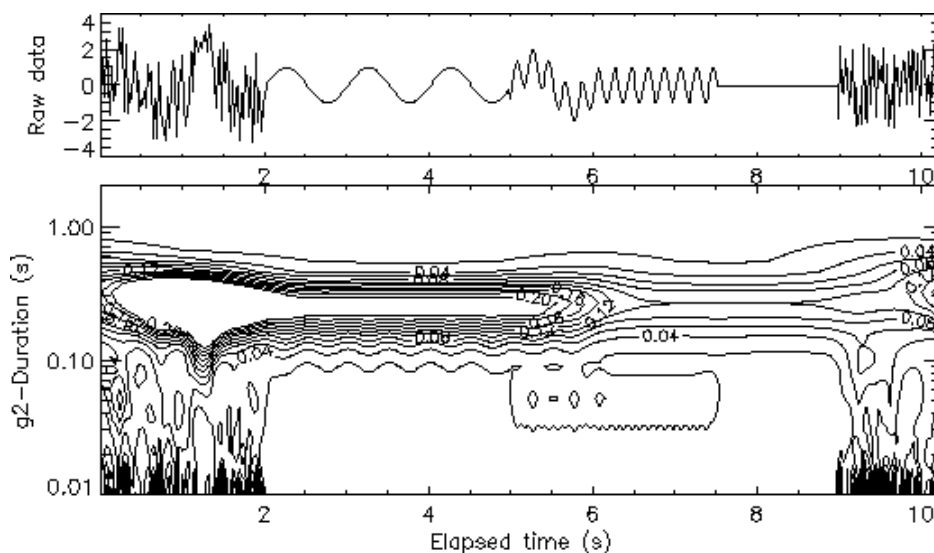


1. строится вейвлетная плоскость сигнала с использованием Мексиканской шляпы.
2. эта плоскость сглаживается путем объединения составляющих, достаточно близко расположенных друг к другу. Сглаживание выполняется путем применения масштабозависимого фильтра, чей размер пропорционален размеру вейвлета.

Результат последовательного применения к сигналам вейвлет-преобразования Мексиканской шляпы и гауссовского фильтра показан на Рис.20-22.



**Рис.21.** Сглаженная плотность энергии модулированного сигнала.



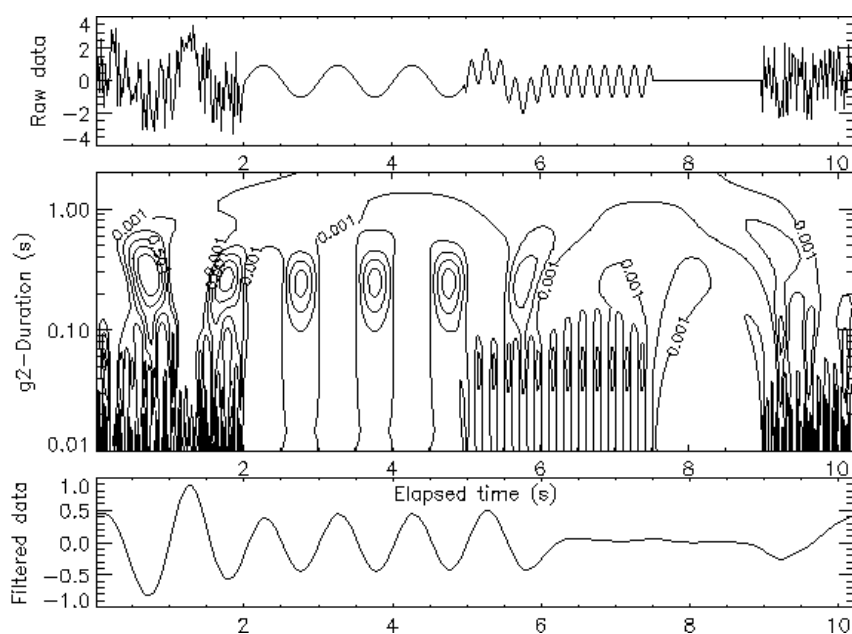
**Рис.22.** Сглаженная плотность энергии смешанного сигнала.

## ПОДЧЕРКИВАНИЕ СВОЙСТВ: ФИЛЬТРАЦИЯ И ОЧИСТКА ШУМА

Обратное преобразование является сердцевинной наиболее известных применений вейвлетов: сжатия данных и численного анализа. В этих приложениях важно, сколько информации достаточно для реконструкции сигнала с заданным качеством. По этим темам имеется множество литературы.

Здесь мы не рассматриваем проблемы экономного представления сигналов: наша цель получить максимально информативное описание сложного сигнала. Рассмотрим в этом контексте два приложения: фильтрацию данных и очистку их от шумов.

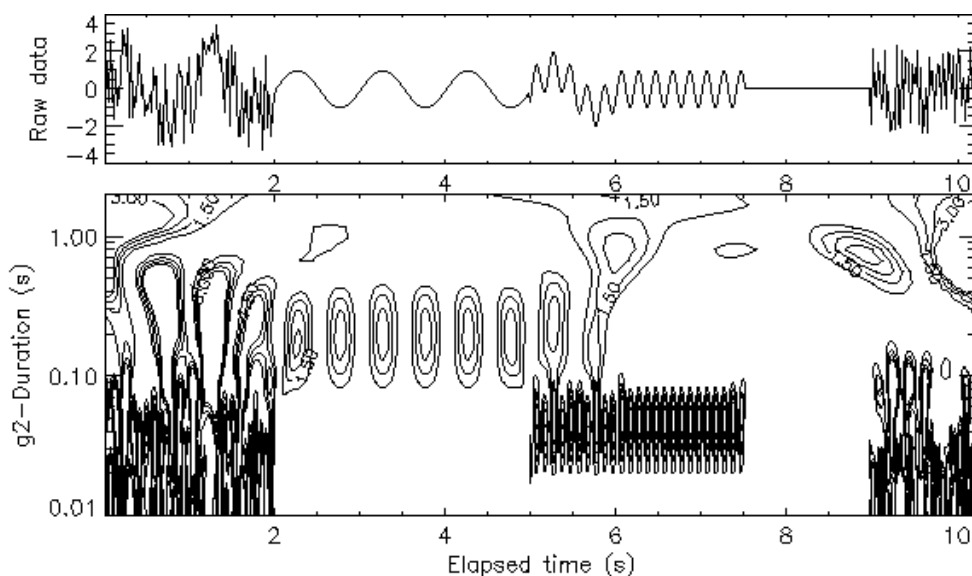
Фильтрация в данном случае заключается в использовании в обратном преобразовании лишь части коэффициентов, не используя некоторые длительности. Это легко сделать графически (закрыв ненужные части графика), численно (пропустив те длительности) и аналитически (интегрируя по части  $k$ -оси). График на Рис.23 был построен из смешанных данных, используя только часть полосы вейвлет-преобразования (20-40%).



**Рис.23.** Фильтрованная реконструкция смешанного сигнала.

## ПОДЧЕРКИВАНИЕ СВОЙСТВ: НОРМАЛИЗАЦИЯ

Высокочастотные составляющие сигнала обычно имеет меньшую энергию, чем низкочастотные. Поэтому при использовании единого масштаба достаточно трудно отобразить на графике контурные линии высокочастотных процессов. Выход может заключаться в нормализации энергии каждого элемента графика путем деления энергии сигнала на усредненный энергетический спектр (Рис. 24).



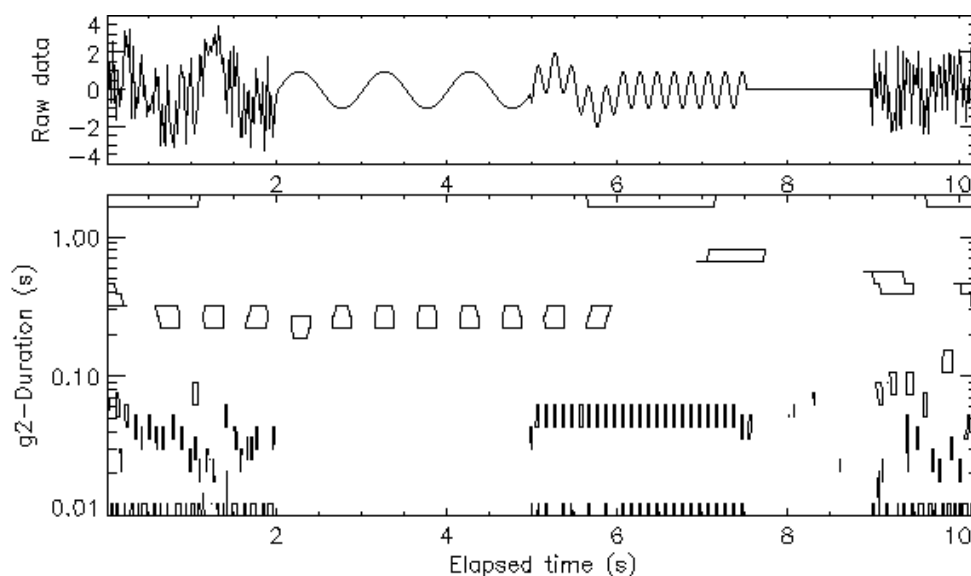
**Рис.24.** Нормализованная вейвлетная плоскость сохраняет информацию о кратковременных изменениях сигнала

## ПОДЧЕРКИВАНИЕ СВОЙСТВ: ЛОКАЛЬНЫЕ МАКСИМУМЫ

В некоторых приложениях факт наличия пиков в сигнале может быть важнее его величины. В этом случае вейвлетная плоскость должна отображать локальные максимумы, независимо от их величины (т.е. пик на низменности и пик на горном плато для нас равноценны). Для достижения этой цели может быть применен следующий алгоритм:

1. определиться с требуемым размером компоненты на вейвлетной плоскости; например, в качестве единицы масштаба может использоваться прямоугольник единичной длительности определенной высоты.
2. определить все локальные максимумы, перемещая этот прямоугольник по графику.
3. для каждого прямоугольника выполнить нормализацию значений графика локальным средним.
4. на графике отображаются лишь компоненты, имеющие значения выше некоторого установленного порога.

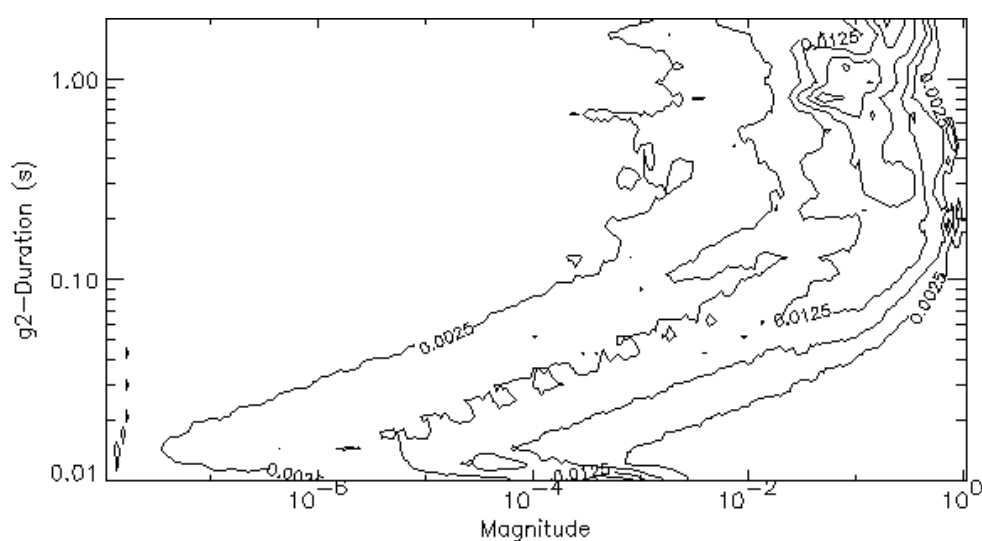
Результат этих операций показан на Рис.25 для смешанного сигнала. Более сложный пример показан на Рис.1



**Рис.25.** Локальные максимумы вейвлетной плоскости.

## УМЕНЬШЕНИЕ ОБЪЕМА ДАННЫХ: ГИСТОГРАММЫ И ПРВ

Вейвлет-коэффициенты на каждом масштабе имеют определенное статистическое распределение, которое может быть аппроксимировано нормализованной гистограммой. Если это проделать для вейвлетной плоскости, то масштаб энергии коэффициентов оказывается распределен по логарифмическому закону, как показано на Рис.26. Может быть показано, что средняя амплитуда на каждом интервале примерно равна среднему значению спектра мощности в логарифмических координатах. Поэтому, это представление функции плотности распределения вероятностей графически показывает масштабно-зависимый разброс вокруг среднего значения спектра.



**Рис.26.** Спектральная ПРВ энергии модулированного сигнала, показанного выше. Среднее значение для каждой длительности дает энергетический спектр, а ПРВ показывает разброс вокруг среднего.